

CWI Syllabi

Managing Editors

K.R. Apt (CWI, Amsterdam)
M. Hazewinkel (CWI, Amsterdam)
J.K. Lenstra (Eindhoven University of Technology)

Editorial Board

W. Albers (Enschede)
P.C. Baayen (Amsterdam)
R.C. Backhouse (Eindhoven)
E.M. de Jager (Amsterdam)
M.A. Kaashoek (Amsterdam)
M.S. Keane (Amsterdam)
H. Kwakernaak (Enschede)
J. van Leeuwen (Utrecht)
P.W.H. Lemmens (Utrecht)
M. van der Put (Groningen)
M. Rem (Eindhoven)
H.J. Sips (Delft)
M.N. Spijker (Leiden)
H.C. Tijms (Amsterdam)

CWI
P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
Telephone 31-20 592 9333, telex 12571 (mactr nl),
telefax 31-20 592 4199

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

Vakantiecursus 1994
Computeralgebra

ISBN 90 6196 443 1
NUGI-code: 811

Copyright © 1994, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam
Printed in the Netherlands

Vakantiecursus 1994

Computeralgebra

INHOUD

A.W. GROOTENDORST
Ten Geleide

L. VAN GASTEL Computeralgebra-systemen in perspectief	1
F.H. SIMONS Gebruik van computeralgebra: twee voorbeelden	13
E.J. ATZEMA Over brandkrommen en hun berekening	26
F.J.L. MARTENS Het oplossen van polynoomvergelijkingen	42
F. VAN DER BLIJ Rekenen met ellebogen; Computeralgebra in dienst van de meetkunde	50
A.W. GROOTENDORST Primitiveren door middel van elementaire functies	77
P. DRIJVERS Het paard van Troje; Computeralgebra in het voortgezet onderwijs	98

TEN GELEIDE

Het onderwerp van de vacatiecursus 1994 is nu eens niet een keuze uit de ideeën die door de leden van de voorbereidingscommissie zijn genoemd, maar het is aangedragen vanuit de hoek van het Expertise Centrum Computer Algebra Nederland (CAN), waarvan Dr. L. van Gastel de leiding heeft.

De auctor intellectualis was daarbij Dr. E. Atzema die voorstelde de cursus te wijden aan de computeralgebra. Dit voorstel werd volgaarne overgenomen door de voorbereidingscommissie en “en petit comité” nader uitgewerkt.

Van het voorlopige resultaat heeft men al kunnen kennismaken via de brochure waarin de cursus werd aangekondigd, het gedetailleerde programma treft U aan in de syllabus die voor U ligt.

U ziet dan tevens dat niet alleen het onderwerp afkomstig is van CAN, maar ook dat van daar uit enkele deskundige sprekers hun medewerking verlenen. Ook dat zij met waardering vermeld.

De computeralgebra lijkt een jonge loot aan de boom der kennis (van de wiskunde). Zij is ook bekend onder vele andere namen: algebraic manipulation, symbolic computation, computational mathematics etc. en zal in deze inleiding verkort vermeld worden als CA.

De computeralgebra is als zodanig ontstaan in het begin van de jaren zestig van deze eeuw toen Slagle het programma SAINT (Symbolic Automatic INtegration) schreef en heeft zich nadien in hoog tempo ontwikkeld.¹ Na de ontwikkeling van een puur arithmetische opererende computer lag het voor de hand dat men omzag naar de constructie van een machine die niet alleen numerieke problemen aankon, maar ook met letters, met symbolen kon opereren. Deze gedachte was echter reeds oud. Leibniz (1646-1716) die zelf al een eenvoudige rekenmachine construeerde (omdat hij vond “dat voorname mensen niet het werk van slaven moesten doen”!) droomde al van een algoritmische taal, een “lingua characteristica” waarin alle wiskundige manipulaties konden worden uitgedrukt, een soort computer algebra avant la lettre dus.

Hiermee is tevens een wezenlijk kenmerk genoemd van CA: het algoritmische karakter en de afwezigheid van ad hoc methoden zoals we straks duidelijk zullen zien bij de integratietheorie.

In deze cursus zal niet het programmeren centraal staan maar vooral de wiskundige aspecten zullen ruimschoots aan de orde komen.

Uiteraard zal er echter eerst een overzicht gegeven worden van een aantal gangbare systemen waarvan enkele bekend zullen zijn (Maple, Derive, Mathematica). Deze taak is toebedeeld aan *Dr. Van Gastel*.

Aan de hand van een tweetal eenvoudige voorbeelden zal *Prof. Simons* demonstreren dat men bij het oplossen van problemen via CA vaak een andere

¹Voor een beknopt historisch overzicht zij verwezen naar:

1. J.H. Davenport, Y. Siret, E. Tournier; Computer Algebra, Academic Press, 1993.
2. L.O. Geddes, S.R. Czapor, G. Labahn; Algorithms for Computer Algebra, Kluwer Academic Publishers, 1992.

wiskundige aanpak verkiest dan zonder CA.

De lezing van *Dr. Atzema* illustreert de hulp die CA kan bieden bij het oplossen van problemen die in principe oplosbaar zijn, maar waarvan de daadwerkelijke oplossing praktisch onuitvoerbaar is-nog afgezien van de kans op rekenfouten! Het gaat hierbij om het bepalen van de zg. kaustische krommen, welk probleem te herleiden is tot eliminatie, een gebied waarop de CA uitermate vruchtbaar is gebleken.

En passant zij hierbij nog gewezen op twee andere-in principe -opgeloste problemen waarvan de effectieve oplossing in vele gevallen praktisch onmogelijk is: het bepalen van de GGD van twee polynomen met behulp van de Euclidische algoritme en het ontbinden van een polynoom.

Wat dit laatste betreft: er zijn voorbeelden van polynomen van de graad 63-met 61 termen- en van de graad 146-met 139 termen- waarvan de factorisatie met behulp van CA resp. 4 en 27 sec. kostte!

Op het uitvoeren van eliminatie gaat *Dr. Martens* nader in aan de hand van polynomiaalvergelijkingen en ook hier zal blijken dat men met CA de problemen vaak anders aanpakt dan "met de blote hand".

Het meetkundige aspect van CA komt aan de orde in de lezing van *Prof. Van der Blij*. Hierbij gaat het eerst om een speels probleem: het formeren van een ruimtekromme, opgebouwd uit "elleboogjes" die aan bepaalde eisen voldoet, waarbij ook hier weer de praktische uitvoering in oude stijl spaak loopt.

Daarnaast is er een puur planimetrisch probleem dat verduidelijkt wordt met "computer graphics."

In het voorafgaande zijn al enkele belangrijke gebieden genoemd waarop CA voortreffelijk hulp kan bieden, maar er zijn er meer; één daarvan is het bepalen van primitieven en het beantwoorden van de vraag of een gegeven functie wel een primitieve "heeft" en vooral ook wat men daaronder moet verstaan. Het bepalen van primitieven kan wellicht de indruk geven van het toepassen van een stel-vrij willekeurige - "trucs", deftiger gezegd, van een heuristische werkwijze. Er bestaat echter een systematische theorie hiervoor en deze ligt ten grondslag aan de manier waarop de CA op dit punt te werk gaat. De basis voor deze theorie werd al gelegd in 1834 door Joseph Liouville (1809-1882) en deze culmineerde in het zg. Risch-algoritme (1969, 1976).

Dit is het onderwerp van de voordracht van *Prof. Grootendorst*.

Traditiegetrouw is ook plaats ingeruimd voor zelfwerkzaamheid van de deelnemers. Niet in de zin dat zij achter een computerscherm worden geplaatst, maar wel in de zin dat hun bepaalde problemen worden voorgelegd waarvan zij een exacte oplossing moeten aangeven, daarbij tot de conclusie komend dat een effectief resultaat moeilijk is aan te geven. Daarna helpt CA hen verder.

In de loop van de geschiedenis is steeds weer gebleken dat iedere poging om ook geestelijke processen te ondersteunen, te vergemakkelijken of te versnellen d.m.v. hulpmiddelen van welke aard dan ook, altijd wel in bepaalde kringen op verzet stuitte.

Het oudste mij bekende voorbeeld ontleen ik aan de *Phaedrus* (274c) van Plato (427-347). Hier is de Egyptische koning Thamos in gesprek met de god Theuth, die de mensheid de getallen en de letters geschonken heeft. Wanneer Thamos te spreken komt over deze letters, heeft hij daarover een vernietigend oordeel en vaart aldus uit tegen Theuth: "U hebt als vader van de letters uit voorliefde het tegendeel beweerd van wat het effect is. Want deze uitvinding zal bij de leerling eerder vergeetachtigheid bewerkstelligen, daar hij zijn geheugen verwaarloost omdat dit- in vertrouwen op het schrift- zich de dingen zal herinneren van buitenaf door middel van vreemde tekens, niet echter van binnenuit en direct".

Zo is er kritiek geweest op de boekdrukkunst, de schrijfmachine, de tekstverwerker, de zakrekenmachine, de computer etc. Naar mijn mening ten onrechte en misschien ook wel omdat velen zich daardoor iets ontnomen achtten en zich bedreigd voelden.

Toch blijft er een vraag over die van het grootste belang is: wat blijft er over voor docent en leerling? Of, beter geformuleerd: hoe wijzigen zich onze taken en hoe moeten wij hierop inspelen? Is hier inderdaad sprake van een "paard van Troje"?

Op deze fundamentele vraag zal *drs. Drijvers* ingaan en dan is de kring van de vacantiecursus op de juiste manier gesloten: eerst de introductie van een voor velen nieuw onderwerp, vervolgens belichting van de achtergronden daarvan, met interessante toepassingen en tenslotte de betekenis van het geheel voor de dagelijkse praktijk van het onderwijs en dit is ieder jaar weer het uiteindelijke doel van de vacantiecursus.

Een Ten Geleide zou niet compleet zijn als het niet expliciet en met dank melding maakte van de steun die bij de voorbereiding van de cursus verleend werd door de uitstekende staf van het CWI, die er ieder jaar weer in slaagt de syllabus keurig op tijd en keurig verzorgd te doen verschijnen; hierbij past tevens de dank aan degenen die zich belast hebben met de registratie van de deelnemers en met zorg voor hun welzijn tijdens de cursusedagen.

Het besluit van dit Ten Geleide kan niet anders zijn dan in voorgaande jaren: de voorbereidingscommissie hoopt op een grote opkomst, zowel van de "oude getrouwen" alsook van vele- even enthousiaste- nieuwelingen en wenst allen- deelnemers en sprekers- van harte twee boeiende dagen toe.

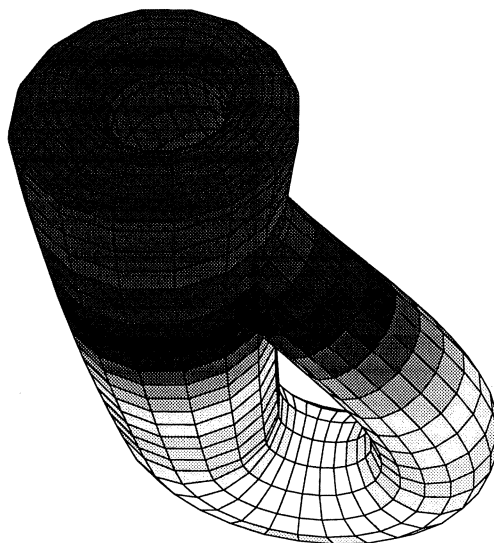
A.W. Grootendorst

Computeralgebra-systemen in perspectief

Leendert J. van Gastel

1. SOFTWARE VOOR WISKUNDE

Computers zijn net zo geschikt voor het werken met formules met symbolen als voor het uitvoeren van numerieke berekeningen. In wezen transformeren zij objecten die gerepresenteerd worden door nullen en enen volgens bepaalde spelregels. Deze spelregels worden vastgelegd en gestuurd door software. Vanuit dit oogpunt is het bewerken van numerieke getallen niet essentiël anders dan het bewerken van polynomen. Het optellen van twee vectoren in de drie-dimensionale ruimte met gehele coördinaten is hetzelfde als het optellen van twee tweede-graads veeltermen met gehele coëfficiënten, alleen de representatie verschilt.



FIGUUR 1. Een Kleinse fles m.b.v. Macsyma

In de ontwikkeling van software voor wiskunde zien we dat de aandacht in de eerste periode uitgaat naar numerieke resultaten. Het rekenen op een schaalgrootte die ver boven het handmatige uitgaat vervult voor veel vakgebieden een grote behoefte. Sinds geruime tijd zijn er dan ook een aantal gebieden waar software intensief bij wiskunde wordt gebruikt.

numerieke wiskunde Het benaderen van oplossingen van wiskundige problemen met numerieke methoden leidt meestal tot grote lineaire stelsels,

waarvoor oplosmethoden ontwikkeld zijn. Het pakket Matlab (Matrix Laboratory) is hierop gebaseerd. Bekende bibliotheken met numerieke routines komen van NAG en IMSL;

statistiek Het verwerken van grote hoeveelheden gegevens en deze bewerken met statistische operaties om er informatie en mogelijke relaties uit te halen, is meestal routine werk en bij uitstek geschikt voor de computer. Bekende pakketten zijn SPSS, S-PLUS en SAS;

visualisatie Het tekenen van grafieken (Gnu-plot, VU-grafiek) en het weergeven van grote verzamelingen gegevens in een 2- of 3-dimensionale ruimte (PV-Wave) lenen zich uitstekend voor implementatie op een computer.

Misschien is de zienswijze dat de computer ook geschikt is voor het bewerken van formules enigszins op de achtergrond geraakt tijdens de indrukwekkende ontwikkeling die hard- en software doorgemaakt hebben en waarbij numeriek rekenen en grafische weergave voorop hebben gestaan. In ieder geval werd er bij de eerste mechanische rekenmachines al bij de aard van de manipulaties stil gestaan. Ada Lovelace verwachtte dit inzicht in 1842 vanzelfsprekend aanwezig bij diegenen die vertrouwd zijn met wiskunde:

“Many persons who are not conversant with mathematical studies imagine that because the business [of Babbage’s Analytical Engine] is to give its results in numerical notation, the nature of its processes must consequently be arithmetical and numerical rather than algebraic and analytical. This is an error. The engine can arrange and combine its numerical quantities exactly as if they were letters or any other general symbols; and in fact it might bring out its results in algebraic notation were provisions made accordingly.”

Toch zou het nog zo’n honderd jaar vergen voordat de “provisions” die Ada Lovelace voorzag “were made accordingly.” Pas in de jaren vijftig en zestig zien we dat tot het uitvoeren van manipulaties van symbolen op een computer de eerste aanzetten worden gegeven. In die periode vond er een samenloop van ontwikkelingen binnen informatica, hardware en wiskunde plaats die dit begin mogelijk maakte.

Binnen de informatica werden concepten als abstracte datatypen ontwikkeld. Zo’n denkwijze is noodzakelijk om langs de lijnen van Ada Lovelace te kunnen werken. Met het ontwikkelen van de taal LISP (LIST Processing language) kwam een werktuig gereed om daadwerkelijk symbolen te manipuleren.

De groei in capaciteit van hardware leidde ertoe dat het geheugen, de snelheid en de schijfruimte toereikend werden. Dit is noodzakelijk voor computeralgebra want bij het werken met symbolen kan de lengte van formules erg snel toenemen (bijvoorbeeld bevat de inverse van de algemene $n \times n$ -matrix ongeveer $(n + 2)!$ termen, dus voor een 8×8 matrix, loopt het aantal termen al in de miljoenen, om nog maar te zwijgen van het aantal bytes).

De wiskunde en natuurkunde kwamen met problemen waarbij het bewerken van bijzonder grote formules nodig was. Verder begon er belangstelling te

ontstaan voor het ontwerpen van constructieve algoritmen, geïnspireerd door de mogelijkheden van de computer. We noemen grootste-gemene-deler berekeningen en het factoriseren van polynomen.

Deze samenkomst van vraag en vervulde randvoorwaarden heeft de ontwikkeling in gang gezet van wat wij nu computeralgebra noemen en waaraan dit overzicht is gewijd. Ook bij andere onderdelen van wiskunde zien we interessante ontwikkelingen op software gebied. Nieuwe gebieden waar software voor wiskunde zich kon ontwikkelen zijn logica en tekstverwerking:

logica LISP bleek zich goed te lenen voor het uitdrukken van logische expressies. Kunstmatige intelligentie kon zijn intrede gaan doen. Later kwam Prolog als alternatief voor LISP;

wiskunde-tekstverwerking Als men wiskunde-tekstverwerking ziet als het produceren en manipuleren van tekst- en formuleblokjes, dan ligt het voor de hand dat hier de computer een rol zou kunnen gaan spelen. Pas met \TeX en \LaTeX wordt dit gangbaar. Inmiddels zijn er ook interactieve systemen zoals Expressionist, die voor dit doel zijn ontwikkeld.

2. COMPUTERALGEBRA

Met het binnen bereik komen van symbolische rekenkracht op de computer, werd het voor de wiskundigen interessant om een algorithmische aanpak van reeds bekende terreinen uit te gaan werken. We noemen een paar voorbeelden.

Aritmetiek

Op de computer kent de hardwarematige integer-aritmetiek een maximale waarde. Dit beperkt de mogelijke berekeningen aanzienlijk. Vanuit een symbolische zienswijze zijn berekeningen met gehele getallen slechts symbolische manipulaties met bepaalde regels. De grootte van het getal is dan geen beperkende factor meer. (De volgende voorbeelden zijn uitgevoerd in het computeralgebrasysteem *Mathematica*.)

```
In[1] := 101^25
```

```
Out[1] = 128243199501723361359275202929838997632567303002501
```

Evenzo wordt het mogelijk om met willekeurige precisie floating point berekeningen uit te voeren. Men kan zich echter voorstellen dat berekeningen die software-matig geschieden trager zijn dan diegene die hardware-matig gebeuren.

```
In[2] := N[Pi, 50]
```

```
Out[2] = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937511
```

Er zijn algoritmen ontwikkeld die getallen kunnen testen op hun primaliteit, en die getallen kunnen factoriseren.

4

```
In[3]:= FactorInteger[50!]
```

```
Out[3]= {{2, 47}, {3, 22}, {5, 12}, {7, 8}, {11, 4},
```

```
> {13, 3}, {17, 2}, {19, 2}, {23, 2}, {29, 1}, {31, 1},
```

```
> {37, 1}, {41, 1}, {43, 1}, {47, 1}}
```

Algebra

Computeralgebra is ijzersterk in het werken met polynomen. Hieronder vallen ook berekeningen aan idealen, en het rekenen in algebraïsche uitbreidingen van \mathbb{Q} en eindige lichamen.

```
In[4]:= Factor[6*x + 35*x^3 + 56*x^5 + 36*x^7 + 10*x^9 + x^11]
```

```
Out[4]= x (1 + x2) (2 + x2) (3 + x2) (1 + 4 x2 + x4)
```

Een bekend resultaat betreffende polynomen is dat het voor een systeem van polynoomvergelijkingen mogelijk is om het om te werken naar een systeem met een eenvoudiger vorm. Die vorm wordt een Gröbner basis genoemd. Zie ook de voordracht van F. Martens in deze bundel. Bijvoorbeeld

```
In[5]:= GroebnerBasis[{x^2 y - x + y, x y^2 - 1}, {x, y}]
```

```
Out[5]= {1 - y + y4, -1 + x + y2 + y3}}
```

Analyse

Bij het differentiëren wordt niet daadwerkelijk de limiet van een differentiequotiënt uitgerekend, in plaats daarvan wordt een functie in onderdelen opgesplitst met behulp van de som-, product- en compositie-regels, en daarna in tabellen de afgeleide opgezocht. Men kan zich voorstellen dat als differentiëren op de computer mogelijk is, het uitrekenen van Taylor-reeksontwikkelingen eveneens tot de mogelijkheden behoort. Limieten van functies van één veranderlijke kunnen in het algemeen met Taylorreeksontwikkelingen berekend worden. Alhoewel er soms meer aan de hand is

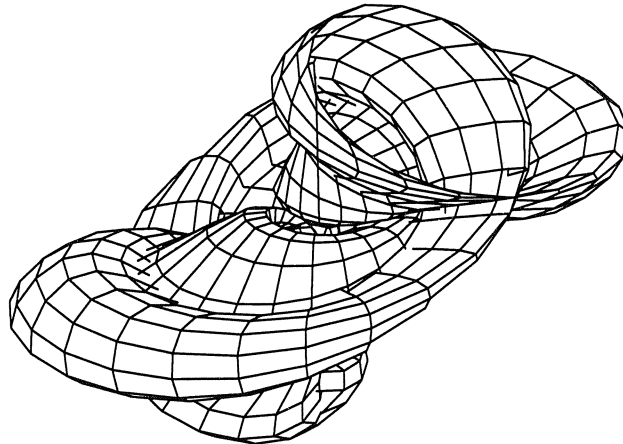
```
In[6]:= Limit[Sin[1/x], x -> 0]
```

```
Out[6]= Interval[{-1, 1}]
```

Deze aanpak van wiskunde op de computer is in de praktijk veelal ook de manier waarop de mens het zou doen. Voor primitiveren (onbepaald integreren) ligt dit anders. Terwijl de mens een heuristische aanpak volgt met intelligent gebruik van bijvoorbeeld substitutie, partiële integreren en tabellenboeken, is bij computeralgebra er een algoritme van Risch in zwang dat voor een klasse van

elementaire functies (polynomen, e-machten, ...) uitsluitel kan geven of een primitieve bestaat binnen deze klasse. (Zie de voordracht van A.W. Grootendorst in deze bundel.) Als het antwoord positief is, geeft dit algoritme daadwerkelijk de primitieve. Dit algoritme bevat te veel stappen om met de hand uit te voeren, maar het is bij uitstek geschikt voor de computer. Er is nog veel onderzoek gaande om de klasse van functies waarvoor dit algoritme opgeld doet, uit te breiden.

Voor het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen is er niet zo een uitverkoren aanpak als het Risch algoritme bij integreren. Toch is er inmiddels een uitgebreid arsenaal aan algoritmen die toegepast kunnen worden, en die in veel optredende gevallen goed resultaat opleveren. Een succesvolle strategie is om te onderzoeken of middels zgn. Lie-symmetrieën de graad van de differentiaalvergelijking verlaagd kan worden.



FIGUUR 2. Een Kleinse fles (Banchhoff-parametrisatie) m.b.v. Maple

3. DE SYSTEMEN

De eerste systemen die werden ontwikkeld in de zestiger jaren waren met name gericht op het uitvoeren van zeer grote berekeningen, die voortkwamen uit specifieke terreinen van de natuurkunde (hoge energie fysica en mechanica). Vanwege die specifieke gerichtheid noemen we dit soort systemen "special purpose systems". Voorbeelden daarvan zijn CAMAL (astronomie) en Schoonschip (hoge energie fysica). Ook de eerste versie van REDUCE is in die tijd ontwikkeld door A. Hearn als "special purpose system" voor berekeningen aan Feynman-diagrammen, een onderwerp uit de hoge energie fysica.

Met een vereenvoudiging van de historie kunnen we drie golven van computeralgebra-systemen onderkennen. Na de eerste golf van special purpose systemen, en met de mogelijkheden als hierboven geschetst, komt er een golf van general purpose systemen. We geven een lijstje met namen en een korte beschrijving van de belangrijkste general purpose systemen.

REDUCE Van origine is REDUCE bestemd voor hoge energie fysica. Echter bleek het al snel ook daarbuiten bruikbaar te zijn. Het biedt een programmeertaal met twee modi: "algebraic mode" en "LISP mode". Met name de tweede maakt dat REDUCE een zeer open systeem is en dat zeer efficiënt en flexibel aan de wensen van een gebruiker aan te passen is. Het heeft een uitgebreide bibliotheek van programma's en functies, waaronder faciliteiten voor het genereren van Fortran en C-code. De gebruikersinterface doet wat ouderwets aan, mede door het ontbreken van grafische mogelijkheden. Er is een email-server: `reduce-netlib@can.nl`.

Macsyma De eerste versie is in 1971 verschenen. Het is gebaseerd op LISP en ontwikkeld door M.I.T. Het heeft een uitgebreide bibliotheek van functies, en algoritmen. Macsyma kan de gebruiker vragen stellen als het meer gegevens nodig heeft voor het bepalen van een antwoord (zie het voorbeeld verderop). Recentelijk is het een tweede leven begonnen: een versie voor MS-Windows is gelanceerd door een nieuw bedrijf onder leiding van R. Petti.

Maple Het pakket is ontstaan uit het "Maple Project" uit de beginjaren '80 met o.a. G. Gonnet en K. Geddes aan de Universiteit van Waterloo (Canada). Later is er een bedrijf, Waterloo Maple Software, voor de commercialisatie opgericht. Maple is ontworpen met een kleine kern geschreven in C, die de basale operaties uitvoert. De meeste wiskundige functies zijn geschreven in de taal Maple, en deze Maple-code is toegankelijk voor de gebruiker. Er zijn tijdschriften "The Maple Technical Newsletter", "Maple Roots", en er zijn ftp-archieven en email-servers waardoor men toegang heeft tot programma's van derden (`maple-netlib@can.nl`).

Mathematica is het tweede systeem dat door S. Wolfram is ontworpen. Het eerste, SMP, heeft veel overeenkomsten met het symbolische deel van Mathematica, maar is nooit aangeslagen. Bij de introductie in 1988 van Mathematica stonden twee zaken voorop: een goede integratie van symbolische, numerieke en grafische mogelijkheden, en een goede marketing. Met Mathematica kunnen "notebook"-documenten gemaakt worden, waarin op natuurlijke wijze tekst, grafieken, invoer en uitvoer geïntegreerd zijn. Er is een tijdschrift "The Mathematica Journal" en er is een ftp- en email-server (`mathsource@wri.com`)

Derive is ontwikkeld door D. Stoutemyer en A. Rich, en in 1988 als opvolger van MuMath op de markt gebracht. Opmerkelijk in vergelijking met de andere systemen is de beperkte omvang van het pakket, en het gemak waarmee een gebruiker via menu's aan de slag kan. Derive is op dit moment alleen voor het MS-DOS platform beschikbaar, een Windows versie is in de maak. Bij Derive hoort een programmeertaal met een bescheiden functionaliteit. Er is sinds kort een tijdschrift "The International Derive Journal".

Axiom is de naam die NAG in 1992 gegeven heeft aan het pakket dat onder de naam Scratchpad door een team onder leiding van R. Jenks bij IBM Yorktown Heights is ontwikkeld. In tegenstelling tot de andere pakketten werkt de programmeertaal met "typen", zoals `Integer` en `UnivariatePolynomial`. Hiermee is het mogelijk om goed met wiskundig structureren te werken, en biedt dit systeem veel mogelijkheden voor werkelijke computeralgebra en niet alleen symbolisch manipuleren. Er zijn voortreffelijke grafische faciliteiten in Axiom, een hypercard-gebaseerd hulpsysteem en men vindt er de beste implementaties van het Gröbner algoritme en het Risch algoritme. Ten nadele van Axiom spreekt de omvang van het pakket en de overhead die het type-systeem met zich meebrengt.

Al deze systemen bieden behalve wiskundige functies, ook een programmeertaal. Zo'n taal kunnen we zien als een *high level mathematics programming language*. Programmeren in een dergelijke taal is vaak relatief eenvoudig, veel programma's bestaan slechts uit één regel. Echter kan de efficiëntie wel eens tegen vallen, als het vergeleken wordt met een taal op een lager niveau, zoals C of FORTRAN.

Bij het ontwikkelen van een computeralgebra-systeem is het ontwerp van het allergrootste belang. Dit betreft onder andere de structuur van de taal, de wijze waarop verschillende onderdelen in elkaar grijpen. Een begrijpelijke en inzichtelijke programmeertaal is bovendien van groot belang voor het succes van een systeem. Eenvoudiger te veranderen is de keuze voor een algoritme dat aangeroepen wordt door een wiskundige functie. Dit kan op zo'n manier dat de gebruiker het niet eens hoeft te merken. Men kan stellen dat als een algoritme van een systeem veranderd dient te worden, er een nieuwe versie uitgebracht wordt. Dient echter het ontwerp van een systeem veranderd te worden, dan wordt er feitelijk een geheel nieuw systeem op de markt gebracht. Dit verklaart waarom veel systemen een directe voorganger hebben die ontwikkeld is door dezelfde personen.

4. ACCEPTATIE IN BREDE KRING

In de jaren tachtig bereikt de ontwikkeling van computeralgebra-technologie een punt waarbij de bruikbaarheid voor een ieder evident werd. Het werd mogelijk om een wiskunde-omgeving op te zetten met grafische, numerieke, symbolische en tekstverwerkingsmogelijkheden. Zo zijn de figuren bij dit overzicht gemaakt door diverse computeralgebra-systemen. Essentiëel hierbij was dat niet alleen de software voldoende gerijpt was, maar dat ook de goedkopere hardware (PC's en Macintoshes) voldoende krachtig was geworden. Het symbolische gedeelte was feitelijk het laatste stuk van de puzzel dat beschikbaar kwam. Gezien de reeds hoge penetratie van computers bij mogelijke gebruikers van zo'n omgeving, was er niet zoveel voor nodig om er een commerciële product van te maken. Er gloorde zoiets als een *computer omgeving om wiskunde te doen* aan de kim.

Stephan Wolfram onderkende dit, en wist met de introductie van *Mathematica* in 1988 op commerciële professionele wijze ruime aandacht van media en

het publiek te trekken. Een boodschap van revolutie en magie bereikte een breed publiek: wiskunde bedrijven ging voortaan als volgt:

```
In[32]:= Solve[Problem]
```

```
Out[32]= Answer
```

Binnen de wiskunde gemeenschap, en met name binnen computeralgebra kringen, wekte deze presentatie wel wat wrevel omdat de ontwikkeling vanuit een éénzijdig perspectief belicht werd. Feit is echter dat verspreiding van computeralgebra buiten de wiskunde wereld bijzonder is gestimuleerd door deze marketing benadering van Wolfram Research. Langzaam groeit sindsdien de marktpositie van wiskunde-systemen met symbolische capaciteiten van een niche naar een centrale positie. Sommige andere producten hebben in het kielzog van *Mathematica* ook een commercialisatie proces doorgemaakt.

Ondanks de brede inzetbaarheid en de boodschap van een probleem-oplosser bleek dat bij wiskundige problemen, de general purpose pakketten zoals Maple en *Mathematica* niet het definitieve antwoord. Ze schieten soms tekort, bijvoorbeeld op aspecten als correctheid als efficiëntie.

Ten aanzien van de correctheid van de resultaten, is het van belang zich te realiseren dat bij elk software systeem afwegingen tussen praktische bruikbaarheid en wiskundige correctheid worden gemaakt.

- Bij het werken met parameters zal bij veel systemen geen uitzonderingen meegenomen worden voor speciale waarden van de parameters:

```
In[1]:= Integrate[x^a, x]
```

```

      1 + a
      x
Out[1]= -----
      1 + a

```

is evident fout voor $a = -1$. Zo is ook het volgende antwoord alleen generiek juist.

```
In[2]:= Solve[a x^2 + b x + c == 0, x]
```

```

      2
      -b - Sqrt[b  - 4 a c]
Out[2]= {{x -> -----},
      2 a

      2
      -b + Sqrt[b  - 4 a c]
      {x -> -----}}
      2 a

```

Macsyma geeft een andere aanpak te zien, het gaat een discussie met de gebruiker aan.

```
(C1) integrate(X^A, X);
```

```
Is A + 1 zero or nonzero?
n;
```

```
(D1)
                                     A + 1
                                     X
                                     -----
                                     A + 1
```

- Meerwaardige functies zoals de wortel functie, en logaritmen zijn alleen welgedefiniëerd op Riemann oppervlakken, en niet op Euclidische ruimten. Dus zij geven problemen zodra ze in de polynomen-wereld van computeralgebra voorgesteld worden. De oorspronkelijke strategie van de meeste systemen was om daar zich niet druk over te maken. Het zij opgemerkt dat er een tendens waarneembaar is om de simplificaties terug te draaien. Vergelijk hiertoe

```
|\~/| Maple V Release 2
._|\| |/\|_ Copyright (c) 1981-1992 by the University of
 \ MAPLE / Waterloo. All rights reserved. MAPLE is a
 <_ _ _ _ _> registered trademark of Waterloo Maple
 | Software. Type ? for help.
```

```
> sqrt(x^2);
```

x

met de volgende release

```
|\~/| Maple V Release 3
._|\| |/\|_ Copyright (c) 1981-1994 by Waterloo Maple
 \ MAPLE / Software and the University of Waterloo.
 <_ _ _ _ _> All rights reserved. Maple and Maple V are
 | registered trademarks of Waterloo Maple
 | Software. Type ? for help.
```

```
> sqrt(x^2);
```

2 1/2

(x)

Er zijn wel methoden toegevoegd om de simplificatie expliciet te bewerkstelligen. *Mathematica* heeft dezelfde weg bewandeld van Versie 1.2 naar Versie 2.0. Men kan zich indenken dat zo'n verandering in het ontwerp vervelende consequenties heeft voor bestaande programma's. *Macysma* gaat impliciet uit van het domein van de reële getallen, blijkens

```
(C2) sqrt(x^2);
```

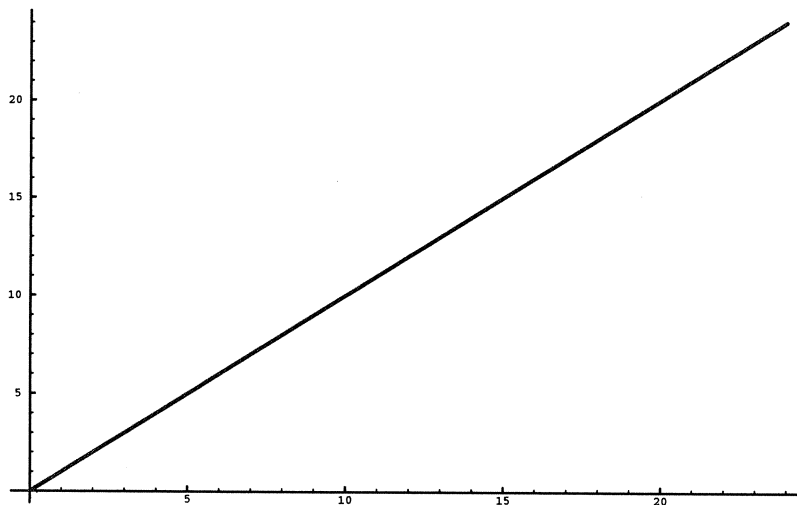
```
(D2)
```

```
ABS(X)
```

- *Plot aliasing* is het fenomeen dat de uitkomst van het grafische algoritme niet de wezenlijke kenmerken van de grafiek weergeeft.

```
In[3]:= Plot[x + Sin[Pi x], {x, 0, 24}]
```

```
Out[3]= -Graphics-
```



FIGUUR 3. Een voorbeeld van "Plot Aliasing".

Een ander probleem met de general purpose systemen is dat de efficiëntie soms niet toereikend is voor de doeleinden van onderzoek. We zien dat nieuwe computer algebra software ontwikkeld worden voor speciale toepassingen. Dan

wordt wel een veel hogere capaciteit gerealiseerd. Er ontstaat een tweede golf van “special purpose systemen” met systemen als Cayley, FORM, Macaulay en LiE. Voor een overzicht van deze systemen, zie [1], of raadpleeg het elektronische informatie systeem CAIN (`gopher.can.nl`).

5. WAAR GAAN WE HEEN?

De tijd dat computeralgebra systemen berucht waren omdat ze de neiging hadden om grote computers plat te leggen, is voorbij. Derive is reeds jaren verkrijgbaar op een zakrekenmachine. Er zijn nu geen technische beletsels meer om computeralgebra voor iedereen bereikbaar te laten worden.

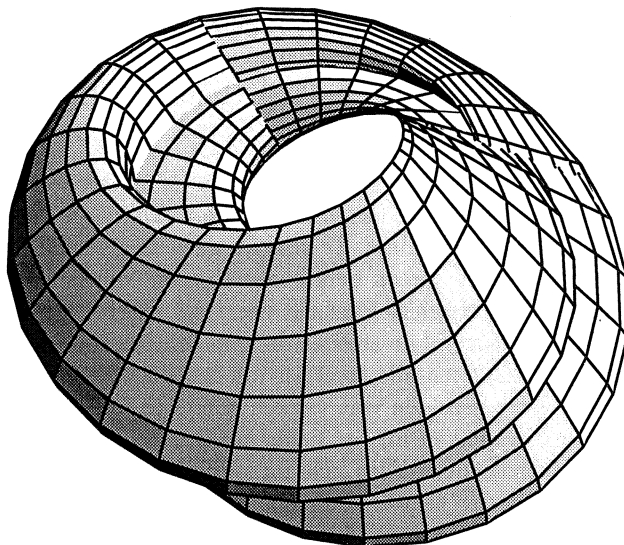
De computerfabrikant Hewlett Packard voert als motto “pervasive computing”, hiermee verwoorden ze hun streven en verwachting van een aanwezigheid van de computer bij praktisch alle facetten van het dagelijks leven. Voor computeralgebra voert het misschien wat ver om zoiets te formuleren, toch is het nu al niet meer weg te denken bij het hoger technisch onderwijs, en in onderzoek in exacte en technische vakken. De introductie in het middelbare school onderwijs ligt in de lijn der verwachting.

Waar liggen de grenzen van de inzetbaarheid van computeralgebra? Er zijn eclatante successen zoals het factoriseren van polynomen en het primitiveren. Er is momenteel veel onderzoek gaande naar meer en snellere algoritmen. Ondertussen groeien de mogelijkheden van computers in een snel tempo door. Kunnen we nu spoedig willekeurig grote problemen oplossen? Twee factoren kunnen we onderscheiden die ons voor overspannen verwachtingen kunnen behoeden.

De eerste factor die meespeelt is de complexiteit van algoritmen (het aantal elementaire operaties dat het algoritme nodig heeft als functie van de grootte van de invoer). Van het Gröbner algoritme wordt vermoed dat de complexiteit dubbelexponentieel is ($n \mapsto c2^{(2^n)}$). Dus als we op een dag met een probleem van grootte $n = 100$ aan het bereik van de beste computer zitten, en we een jaarlijkse verdubbeling van de capaciteit van computers veronderstellen, dan zou het nog $2^{200} \approx 10^{60}$ jaar duren voordat een probleem van grootte $n = 200$ aangepakt kan. Een dergelijke complexiteit verhindert dus in praktische zin een wezenlijke groei. Men kan zich voorstellen dat dit een belangrijke reden voor onderzoek naar snellere algoritmen vormt.

Een andere factor die meespeelt is dat van sommige problemen aangetoond is dat zij niet oplosbaar zijn. Dit geldt bijvoorbeeld voor het simplificeren van expressies opgebouwd uit polynomen en wortels. Men heeft bewezen dat er geen algoritme bestaat dat in staat is om voor elk tweetal uitdrukkingen die equivalent zijn, aan te tonen dat inderdaad hun verschil gelijk 0 is. Er zijn eveneens problemen met systemen als *Mathematica* die intern gebaseerd zijn op herschrijfgeregels, met de vraag of het rekenproces altijd tot een einde komt.

Hoe ontwikkelen computeralgebra-systemen zich verder? De richting van een *omgeving* om te rekenen en wiskunde te bedrijven is nog steeds van groot belang. Je kunt bijvoorbeeld denken aan een omgeving waar je een probleem kunt specificeren in een tekstverwerker, kennis van het domein kunt opgeven



FIGUUR 4. Een Kleinse fles (Dieudonné-parametrisatie) m.b.v. *Mathematica*

aan een wiskundesysteem op de achtergrond, berekeningen kunt laten doen door een wiskundesysteem naar keuze, grafieken kunt laten maken, verwijzingen in de literatuur er op na slaan. Maar variërend op het vloeien van het water door de Rijn, zal er nog een veelheid van symbolen te manipuleren zijn, voordat we een werkelijke wiskunde-omgeving als een vanzelfsprekendheid zullen zien.

REFERENTIES

- [1] Computeralgebra in Deutschland, uitgegeven door de FachGruppe Computeralgebra der GI, DMV, GAMM. Passau en Heidelberg 1993.
- [2] A.M. COHEN, J.H. DAVENPORT, A.J.P. HECK: *An overview of Computer Algebra*, in *Studies in Computer Algebra for Industry*, J. Wiley & Sons, 1992.
- [3] D.R. STOUTEMYER: *Crimes and Misdemeanors in the Computer Algebra Trade*, *Notices of the Amer. Math. Soc.* **38**, (1991).
- [4] B.F. CAVINESS: *Computer Algebra: Past and Future*, in *Eurocal '85*, *Lecture Notes in Computer Science* **203**, 1985.
- [5] R.J. FATEMAN: *Advances and Trends in the Design and Construction of Algebraic Manipulation Systems*, 1990.

Gebruik van computeralgebra: twee voorbeelden

Fred Simons

Computeralgebra is op alle niveau's zowel voor wiskundigen als voor gebruikers van wiskunde een buitengewoon krachtig hulpmiddel. Alleen vereist het werken met zo'n pakket enig inzicht in zowel wiskunde als de mogelijkheden en onmogelijkheden van het pakket. Vaak is de wijze van aanpakken ook verschillend, vergeleken met wat we zouden doen als we geen computeralgebra tot onze beschikking zouden hebben. Ik zal dat aan de hand van twee voorbeelden laten zien. Het eerste betreft een probleem uit de meetkunde en het tweede gaat over de methode van Newton-Raphson voor het oplossen van vergelijkingen.

OPGAVE. (Zie figuur 1) De driehoek ABC is gelijkbenig met een tophoek C van 20° . Op BC kiezen we P zo dat $\angle PAB = 60^\circ$ en op AC kiezen we Q zo dat $\angle QBA = 50^\circ$. Bepaal $\angle QPC$.

Dit probleem heeft een heel elegante elementaire meetkundige oplossing, maar die is niet zo eenvoudig te vinden. Met computeralgebra kunnen we eerst het probleem numeriek oplossen, waardoor we een vermoeden van de exacte oplossing krijgen en vervolgens aantonen dat dat vermoeden juist is. Met behulp van het computeralgebra pakket MATHEMATICA gaat dat als volgt.

Noem $AB = c$. De hoeken bij A , B en Q van $\triangle ABQ$ zijn respectievelijk 80° , 50° en 50° , zodat volgens de sinusregel geldt

$$BQ = \frac{c \sin(80^\circ)}{\sin(50^\circ)}.$$

De hoeken bij A , B en P van $\triangle ABP$ zijn respectievelijk 60° , 80° en 40° , zodat volgens de sinusregel geldt

$$BP = \frac{c \sin(60^\circ)}{\sin(40^\circ)}.$$

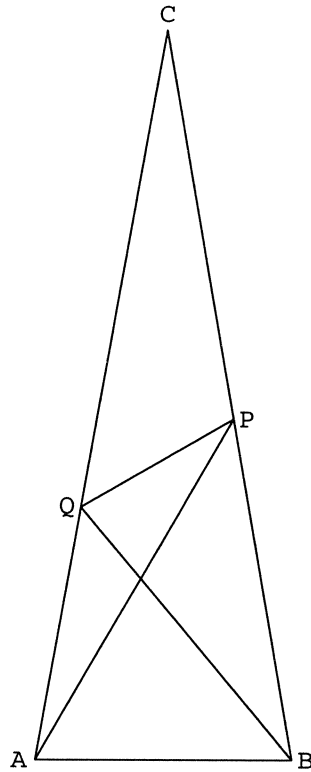
Noem nu $\angle QPB = x$, dan is $\angle PQB = 150^\circ - x$ en levert de sinusregel in $\triangle PQB$

$$\frac{c \sin(80^\circ)}{\sin(50^\circ) \sin(x)} = \frac{c \sin(60^\circ)}{\sin(40^\circ) \sin(150^\circ - x)}$$

ofwel de vergelijking

$$\sin(50^\circ) \sin(60^\circ) \sin(x) = \sin(40^\circ) \sin(80^\circ) \sin(150^\circ - x)$$

Een oplossing van deze vergelijking springt niet direkt in het oog, zodat we eerst maar numeriek oplossen:



FIGUUR 1

```
In[1]:= FindRoot[ Sin[50 Degree] Sin[60 Degree] Sin[x Degree] ==
              Sin[40 Degree] Sin[80 Degree] Sin[(150-x) Degree], {x, 60} ]
```

```
Out[1]= {x -> 70.}
```

We vermoeden dat de vergelijking een exacte oplossing 70° heeft, zodat de gevraagde $\angle QPC$ dan 110° is. We hebben de opgave nu dus teruggebracht tot het volgende gonioprobleem:

OPGAVE. Bewijs dat

$$\sin(50^\circ) \sin(60^\circ) \sin(70^\circ) = \sin(40^\circ) \sin(80^\circ) \sin(80^\circ) .$$

Dit kan door handig gebruik te maken van goniiformules op vele manieren aangetoond worden. Ieder computeralgebra pakket kent natuurlijk de standaard goniiformules maar zo'n pakket is zelden in staat de ad-hoc slimheid op te brengen om zelfstandig zo'n formule te bewijzen. Met wat kennis van het pakket kan de gebruiker soms wel een slimmigheidje bedenken om zo'n

betrekking aan te tonen. Met MATHEMATICA werkt in dit geval de niet zo voor de hand liggende opdracht:

```
In[2]:= Factor[ Sin[5 x] Sin[6 x] Sin[7 x] - Sin[4 x] Sin[8 x]^2,
             Trig->True ] /. x->Pi/18
```

```
Out[2]= 0
```

Het is hier essentieel dat we eerst factoriseren en dan pas invullen. Doen we dit andersom dan verslikt MATHEMATICA zich in de complexe getallen.

Nu zonder dit slimmigheidje. Een computeralgebra pakket is sterk in het werken met polynomen. Vaak is het verbazingwekkend wat na herleiding van een probleem tot een polynoomprobleem allemaal systematisch gedaan kan worden. We laten dit aan ons probleem zien.

In de formule staan alleen sinussen van veelvouden van 10° . In MATHEMATICA kunnen we de sinus van een veelvoud van x uitdrukken in $\sin(x)$ en $\cos(x)$ met behulp van de functie TrigReduce (in de context "Algebra'Trigonometry", die dus eerst geladen moet worden). We schrijven $s = \sin(10^\circ)$ en $c = \cos(10^\circ)$ en herleiden $\sin(n \cdot 10^\circ)$ tot een uitdrukking in s en c met behulp van de functie $f(n)$:

```
In[3] := Needs["Algebra'Trigonometry"]
```

```
In[4]:= f[n_] := TrigReduce[ Sin[n x] ] /. {Sin[x]->s, Cos[x]->c}
```

We moeten laten zien dat $f(5)f(6)f(7) - f(4)(f(8))^2 = 0$. We rekenen het linkerlid uit:

```
In[5]:= Expand[ f[5] f[6] f[7] - f[4] f[8]^2 ]
```

```
Out[5]= 210 c15 s3 - 256 c17 s3 - 2170 c13 s5 + 3840 c15 s5 + 7882 c11 s7 -
> 19712 c13 s7 - 12210 c9 s9 + 41728 c11 s9 + 7958 c7 s11 - 41728 c9 s11 -
> 2126 c5 s13 + 19712 c7 s13 + 206 c3 s15 - 3840 c5 s15 - 6 c3 s17 +
> 256 c3 s17
```

Het resultaat is een polynoom in s en c . Dit moet nog vereenvoudigd worden gebruik makend van de betrekkingen $s^2 + c^2 = 1$ en $\sin(30^\circ) = f(3) = \frac{1}{2}$. Daarvoor hoeven we zelf niet slim te rekenen; computeralgebra pakketten kunnen dat redelijk efficiënt en systematisch met behulp van de Groebnerbasis theorie. In MATHEMATICA hebben we daarvoor de opdracht AlgebraicRules:

```
In[6]:= % /. AlgebraicRules[ {s^2+c^2 == 1, f[3] == 1/2} ]
```

```
Out[6]= 0
```

Hiermee is de formule dus bewezen.

K.A. Post maakte mij er op attent dat eerste probleem verschenen is in “Onderzoek en Thuiscomputer”, nummer 14, maart 1992. Er worden een aantal oplossingen vermeld, die in weerwil van de titel van het tijdschrift geen van alle van de computer gebruik maken, en ook wordt wat over de geschiedenis van het probleem gezegd. Het staat o.a. ook in Ross Hornsberger, *The Dolciani Mathematical Expositions, Mathematical Gems II*, M.A.A. 1976, met de vermelding dat het al in 1951 bekend was.

Het tweede onderwerp van deze voordracht is het gebruik van computeralgebra bij het vinden van een nulpunt α van een functie f . Er zijn maar weinig functies waarvan de nulpunten exact bepaald kunnen worden (en dat zijn precies de functies die we in het onderwijs heel vaak tegenkomen!), zodat we in de regel gebruik moeten maken van numerieke benaderingsmethoden. Hoewel computeralgebra pakketten niet speciaal voor numeriek rekenwerk ontwikkeld zijn, leveren ze in niet al te specialistische situaties toch goede resultaten.

Een veel gebruikte numerieke techniek voor het benaderen van een nulpunt van een functie is de iteratiemethode van Newton-Raphson. Iteratie is het herhaald toepassen van een geschikte iteratiefunctie, zeg it , zodanig dat de rij die hierdoor ontstaat liefst snel naar de gezochte waarde convergeert. Formeel wordt de iteratierij gedefiniëerd door

$$a_0 = s, \quad a_n = it(a_{n-1}) \text{ voor } n = 1, 2, \dots$$

Hierin is s de startwaarde van de rij; deze dient in de regel niet al te ver van het punt dat we willen benaderen gekozen te worden. Als de iteratiefunctie it continu is en de iteratierij convergeert naar α , dan zien we door de limiet te nemen voor $n \rightarrow \infty$ dat $it(\alpha) = \alpha$.

Er zijn vele methoden om de iteratieformule van Newton-Raphson voor het benaderen van een nulpunt α van een functie f af te leiden. Vaak gebeurt het grafisch: als a_n een benadering voor α is, bepaal dan de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a_n, f(a_n))$. Het snijpunt a_{n+1} van deze raaklijn met de horizontale as is dan een betere benadering voor α . Meetkundig is het duidelijk dat de zo verkregen iteratierij naar het nulpunt convergeert. We hebben alleen geen informatie hoe snel dat gaat. De volgende afleiding levert ons die informatie wel.

Beschouw een functie f waarvan we een nulpunt α willen benaderen. We gaan dat doen met een iteratiefunctie it van de gedaante

$$it(x) = x + p(x) f(x)$$

waarin we de functie p nog nader zullen bepalen. Merk nog op dat uit $f(\alpha) = 0$ volgt dat $it(\alpha) = \alpha$, zodat het niet onmogelijk is dat voor een geschikte startwaarde s de iteratierij naar α convergeert.

De kern van het probleem is de volgende vraag: als x dicht bij α ligt, hoe dicht ligt dan $it(x)$ bij α ? En kunnen we p zo bepalen dat $it(x)$ veel dichter

bij α ligt? Om dit uit te zoeken laten we MATHEMATICA het tweede orde Taylorpolynoom van $it(x) - \alpha$ bepalen bij $x = \alpha$. In plaats van de letter α gebruiken we de letter a . In de eerste opdracht geven we a de eigenschap dat $f(a) = 0$. Dan wordt de functie it gedefiniëerd en vervolgens het tweede orde Taylorpolynoom van $it(x) - a$ bij $x = 2$ bepaald.

```
In[1]:= a /: f[a] = 0
```

```
Out[1]= 0
```

```
In[2]:= it[x_] := x + p[x] f[x]
```

```
In[3]:= Series[ it[x] - a, {x, a, 2} ]
```

```
Out[3]= (1 + p[a] f'[a]) (-a + x) + (f'[a] p'[a] +  $\frac{p[a] f''[a]}{2}$ ) (-a + x)2 +
```

```
> 0[-a + x]3
```

Uit deze formule voor $it(x) - a$ volgen een aantal belangrijke conclusies:

- Als $|1 + p(\alpha)f(\alpha)| > 1$, dan ligt $it(x)$ verder van α af dan x en zal de iteratierij niet naar α convergeren.
- Als deze uitdrukking kleiner is dan 1, dan ligt $it(x)$ dichterbij α dan x en des te meer naarmate $1 + p(\alpha)f(\alpha)$ dichterbij 0 ligt.

We krijgen dus zeer snelle convergentie als we de functie p zo kiezen dat deze uitdrukking 0 wordt. Dat is tamelijk eenvoudig: definiëer

$$p(x) = \frac{-1}{f'(x)},$$

dan vinden we voor $it(x)$ de formule van Newton-Raphson:

$$it(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

met de eigenschap dat

$$it(x) - \alpha = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x - \alpha)^2 + O(x - \alpha)^3.$$

Dit zien we ook direct met MATHEMATICA:

```
In[4]:= p[x_] := -1/f'[x]
```

```
In[5]:= it[x]
```

```
Out[5]= x -  $\frac{f[x]}{f'[x]}$ 
```


$$xy - 3y^2 = y(x - 3y) = 0.$$

De oorsprong is dus een dubbelpunt en de twee raaklijnen zijn $y = 0$ and $x - 3y = 0$. We kunnen dat ook met de computer zien door de plotintervallen wat kleiner rond de oorsprong te nemen en het aantal tussenpunten te verhogen, bijvoorbeeld tot 40. We krijgen zo de rechterkant van figuur 2. Het resultaat is wel beter, maar nog niet echt bevredigend.

Plaatselijk kunnen we dus een steeds nauwkeuriger beeld van de kromme krijgen door steeds fijner te gaan plotten. Maar we kunnen ook analytisch informatie vinden hoe de kromme lokaal loopt. Laten we bij wijze van voorbeeld de kromme eens nader beschouwen in de buurt van $(0, 1)$. Op grond van de impliciete functiestelling kunnen we een deel van de kromme in de buurt van $(0, 1)$ opvatten als de grafiek van een functie $y(x)$ met $y(0) = 1$ en de vraag is dus hoe de grafiek van deze functie er uit ziet voor x dicht bij 0. Die informatie halen we uit het Taylorpolynoom voor y bij $x = 0$:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2} + \dots + \frac{y^{(n)}(0)x^n}{n!} + O(x)^{n+1}.$$

Om in ons voorbeeld het Taylor polynoom te vinden hebben we dus de afgeleiden van y in $x = 0$ nodig. Met de hand doen we dat met impliciet differentiëren: we beschouwen y als functie van x , differentiëren de betrekking naar x en vullen $x = 0$ en $y(0) = 1$ in. Uit de zo ontstane vergelijking lossen we $y'(0)$ op. Vervolgens differentiëren we de betrekking nogmaals naar x en vullen $x = 0$, $y(0) = 1$ en de zonet gevonden waarde voor $y'(0)$ in. Oplossen van de zo ontstane vergelijking in $y''(0)$ geeft de waarde van de tweede afgeleide. Enzovoort. Dit is tamelijk vervelend rekenwerk, dat met enige moeite ook met de computer uitgevoerd kan worden. Maar eigenlijk is deze werkwijze voor computeralgebra volkomen ongeschikt. Zogenaamde machtrekssubstitutie gaat veel eenvoudiger.

Bij wijze van voorbeeld zoeken we de tweede orde benadering van $y(x)$ met $y(0) = 1$ rond $x = 0$. We zoeken dus coëfficiënten a_1 en a_2 zodanig dat

$$p = 1 + a_1x + a_2x^2 + O(x)^2$$

een oplossing van de vergelijking $f(x, y) = 0$ in y is.

```
In[1]:= eq = x^5 - x^3 y + 3 y^4 - 3 y^2 + x y == 0
```

```
Out[1]= x^5 + x^3 y - x^3 y - 3 y^4 + 3 y^4 == 0
```

```
In[2]:= p = 1 + a[1] x + a[2] x^2 + 0[x]^3
```

```
Out[2]= 1 + a[1] x + a[2] x^2 + 0[x]^3
```

```
In[3]:= eq /. y->p
```

```
Out[3]= (1 + 6 a[1]) x + (a[1] - 3 (a[1] + 2 a[2]) + 3 (6 a[1] + 4 a[2]))
>      2      3
      x + 0[x] == 0
```

In dit resultaat zit uiteraard nog een term met een macht van $O(x)$. We gaan nu a_1 en a_2 zo bepalen dat de coëfficiënten van het polynoom in het linkerlid 0 worden. Dat geeft twee vergelijkingen voor a_1 en a_2 . Met MATHEMATICA kunnen we deze vergelijkingen direct oplossen:

```
In[4]:= Solve[ % ]
```

```
Out[4]= {{a[2] -> -(---), a[1] -> -(--)}}
```

$$\left\{ \left\{ a[2] \rightarrow -\frac{1}{24}, a[1] \rightarrow -\frac{1}{6} \right\} \right\}$$

```
In[5]:= p /. %[[1]]
```

```
Out[5]= 1 - - - -- + 0[x]
```

$$1 - \frac{x}{6} - \frac{x^2}{24} + 0[x]$$

Deze techniek werkt ook in het dubbelpunt. Op de volgende manier vinden we met één opdracht de zesde orde benaderingen van beide oplossingen door de oorsprong:

```
In[6]:= p = Sum[a[k] x^k, {k, 1, 6} ] + 0[x]^7
```

```
Out[6]= a[1] x + a[2] x^2 + a[3] x^3 + a[4] x^4 + a[5] x^5 + a[6] x^6 + 0[x]^7
```

```
In[7]:= p /. Solve[eq /. y->p]
```

```
Out[7]= {- - - - - + x - - - - - + - - - - - + 0[x] , -x - x + 0[x] }
```

$$\left\{ -\frac{x^3}{3} - \frac{8x^4}{27} + x^5 - \frac{4x^6}{81} + \frac{11x^7}{9} + 0[x], -x - x^2 + 0[x] \right\}$$

De techniek van machtrekssubstitutie is met computer algebra een eenvoudig en krachtig middel voor het vinden van Taylorpolynomen van niet al te hoge orde van impliciet gegeven functies. Voor hogere orde benaderingen is er echter een nog veel betere techniek. Deze berust op de zojuist behandelde methode van Newton-Raphson. Het is niet zo algemeen bekend dat deze schijnbaar numerieke techniek ook gebruikt kan worden bij symbolisch rekenen.

Laat de functie $y(x)$ gegeven zijn door de betrekking $f(x, y) = 0$ en $y(a) = b$, dus $f(a, b) = 0$. Om $y(x)$ te vinden moeten we voor iedere x in de buurt van a de vergelijking $f(x, y) = 0$ oplossen. Deze beschouwen we dus als vergelijking in y , x is een parameter. We lossen deze vergelijking op met iteratie met de functie

$$it(y) = y - \frac{f(x, y)}{f_y(x, y)}.$$

We hebben al gezien dat deze iteratietechniek de eigenschap heeft dat bij iedere iteratieslag de nieuwe fout op de duur vrijwel een constante keer het kwadraat van de vorige fout is. Dat betekent dat als p een benadering voor y is met een nauwkeurigheid vrijwel een constante maal $(x - a)^n$, $it(p)$ een benadering is voor y met een nauwkeurigheid vrijwel een constante maal $(x - a)^{2n}$.

Anders geformuleerd:

$$\text{als } y(x) = p(x) + O(x - a)^n, \text{ dan geldt } y(x) = it(p(x)) + O(x - a)^{2n}.$$

Het kiezen van de startwaarde is hier zelden een probleem. Er geldt immers

$$y(x) = b + O(x - a).$$

Na n keer itereren hebben we dan de $(2^n - 1)$ -e orde benadering gevonden. Tot besluit laten we zien hoe dit in het voorbeeld werkt. We beginnen met de definitie van f , de iteratiefunctie it en de startwaarde $p = 1$.

```
In[1]:= f = x^5 - x^3 y + 3 y^4 - 3 y^2 + x y
```

```
Out[1]= x^5 + x^3 y - x^2 y^3 + 3 y^4
```

```
In[2]:= it = Simplify[ y - f / D[f, y] ]
```

```
Out[2]= (x^5 + 3 y^2 - 9 y^4) / (-x^3 + x^3 + 6 y^3 - 12 y^3)
```

```
In[3]:= p = 1
```

```
Out[3]= 1
```

Vervangen we nu in it y door p dan krijgen we een functie die y benadert met nauwkeurigheid $O(x)^2$:

```
In[4]:= it /. y->p
```

```
Out[4]= (-6 + x^5) / (-6 - x^3 + x^3)
```

Dit is een vrij ingewikkelde functie. Maar zijn eerste orde Taylorpolynoom benadert y ook met een nauwkeurigheid $O(x)^2$ en kunnen we gebruiken om y met een nauwkeurigheid $O(x)^4$ te benaderen:


```
In[5]:= p = Normal[ Series[ %, {x, 0, 1} ] ]
```

```
Out[5]= 1 -  $\frac{x}{6}$ 
```

```
In[6]:= p = Normal[ Series[ it /. y->p, {x, 0, 3} ] ]
```

```
Out[6]= 1 -  $\frac{x^2}{6}$  -  $\frac{x^3}{24}$  +  $\frac{4x^3}{27}$ 
```

Met een klein MATHEMATICA-foefje kunnen we dit verdubbelen van de O -macht en het Taylorpolynoom wat handiger doen:

```
In[7]:= p = 1 + 0[x]
```

```
Out[7]= 1 + 0[x]
```

```
In[8]:= p[[5]] = 2 p[[5]]; p = it /. y->p
```

```
Out[8]= 1 -  $\frac{x^2}{6}$  + 0[x]
```

```
In[9]:= p[[5]] = 2 p[[5]]; p = it /. y->p
```

```
Out[9]= 1 -  $\frac{x^2}{6}$  -  $\frac{x^3}{24}$  +  $\frac{4x^3}{27}$  + 0[x]
```

Na nog twee keer itereren vinden we

```
In[12]:= p[[5]] = 2 p[[5]]; p = it /. y->p
```

```
Out[12]= 1 -  $\frac{x^2}{6}$  -  $\frac{x^3}{24}$  +  $\frac{4x^3}{27}$  +  $\frac{253x^4}{3456}$  -  $\frac{19x^5}{162}$  -  $\frac{28937x^6}{248832}$  -  $\frac{1265x^7}{11664}$  +
>  $\frac{258515x^8}{23887872}$  +  $\frac{445237x^9}{5038848}$  +  $\frac{371186633x^{10}}{5159780352}$  -  $\frac{1699549x^{11}}{120932352}$  -  $\frac{93672366319x^{12}}{743008370688}$  -
>  $\frac{4689313921x^{13}}{34828517376}$  -  $\frac{609449883731x^{14}}{17832200896512}$  +  $\frac{275498764865x^{15}}{2507653251072}$  +
```

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 10271347716390912
 \end{array} \\
 & \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 25999348907114496
 \end{array} \\
 & \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 14975624970497949696
 \end{array} \\
 & \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 359414999291950792704
 \end{array} \\
 & \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 51755759898040914149376
 \end{array} \\
 & \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 33537732413930512368795648
 \end{array} \\
 & \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 3219622311737329187404382208
 \end{array} \\
 & \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 231812806445087701493115518976
 \end{array}
 \end{aligned}$$

Dit gaat wel iets sneller dan 32 vergelijkingen met 32 onbekenden opstellen en oplossen.

We hebben in het voorafgaande gezien hoe makkelijk een computeralgebra-pakket kan rekenen met ordebenaderingen. Met de hand zijn we dat niet zo gewend te doen. Als uitsmijter laat ik nog zien dat het bepalen van een hoge afgeleide van een functie door te differentëren in de regel langzamer is dan het bepalen van de volledige ordebenadering van die functie, waar die afgeleide nota bene in zit. Heel verrassend is dat niet. Door te werken met orde benaderingen rekenen we essentieel met polynomen, waarbij termen van te hoge graad

Over brandkrommen en hun berekening

Eisso J. Atzema

1. INLEIDING

Het is vandaag de dag gebruikelijk over krommen in het platte vlak te denken als de plaatjes die 'horen bij' een vergelijking in twee variabelen, zeg x en y . Voor het gemak worden voor deze vergelijkingen heel vaak polynoom vergelijkingen, dat wil zeggen vergelijkingen van de vorm

$$\sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} a_{ij} x^i \right) y^j = 0$$

genomen.

De krommen die bij dergelijke vergelijkingen horen heten *algebraïsche* krommen en de graad van de vergelijking in x en y biedt een natuurlijke indeling van deze krommen. Alle krommen die (complex beschouwd) hoogstens n maal door een rechte lijn worden gesneden worden door een vergelijking van graad n beschreven. Door de keuze van de coëfficiënten a_{ij} kunnen wij dus alle krommen die hoogstens n (complexe) snijpunten hebben met een rechte lijn vastleggen.

Een nadeel van de beschrijving van de algebraïsche krommen met behulp van een polynoom vergelijking is dat deze nauwelijks een indruk geeft van de vorm van de krommen zelf. Een willekeurige keuze van de coëfficiënten van de vergelijking levert vaak een weinig interessant plaatje op, maar een kleine verandering kan hier weer op spectaculaire wijze verandering in brengen.

Wanneer we op zoek zijn naar algebraïsche krommen met bepaalde eigenschappen is het dan ook veel beter te proberen een manier te vinden om krommen met die eigenschap op systematische wijze voort te brengen. We kunnen daarbij bijvoorbeeld gebruik maken van de klassieke stangen-constructies. Dat wij bij deze wijze van voortbrenging ook inderdaad met algebraïsche krommen te maken hebben volgt daaruit dat de bepaling van de baan van een punt op een stangen-constructie in wezen een eliminatie probleem is waarbij uitsluitend algebraïsche vergelijkingen optreden. Zoals we zullen zien hebben dergelijke problemen altijd algebraïsche vergelijkingen als oplossing. Andersom kunnen we al aan voortbrenging met behulp van stangen-constructies zien dat er veel constructies in de mechanica zullen zijn die aanleiding geven tot de bepaling van algebraïsche krommen. Zeer dikwijls levert zo'n constructie met zeer eenvoudige middelen al een hoogst gecompliceerde kromme op.

In deze bijdrage wil ik aandacht besteden aan een speciale wijze van voortbrenging van algebraïsche krommen, namelijk de voortbrenging van krommen als zogenaamde omhullenden van families van algebraïsche krommen. In het

bijzonder wil ik daarbij ingaan op de bepaling van omhullenden van families van rechte lijnen en van cirkels. Het gebruik van de methoden die gebruikt zouden kunnen worden om dergelijke krommen te berekenen wil ik illustreren met behulp van een heel speciale klasse van omhullenden, namelijk die van de zogenaamde brandkrommen uit de optica. Deze krommen worden voortgebracht als de omhullenden van families van aan een kromme weerkaatste of gebroken lichtstralen.

In het navolgende zal ik eerst laten dat ook de bepaling van omhullenden aanleiding geeft tot een eliminatie probleem. Hebben we te maken met de omhullenden van algebraïsche krommen, dan betekent dit dat ook deze omhullenden algebraïsch zullen zijn. Voor het bijzondere geval van de brandkrommen zal ik laten zien dat we in geval van breking of weerkaatsing aan een algebraïsche kromme ook weer een algebraïsche kromme krijgen. Aan de hand van een speciale constructie kan de brandkromme weer in verband worden gebracht met een andere belangrijke familie van omhullenden, namelijk die van de normalen aan een kromme. Deze constructie kan goed gebruikt worden om brandkrommen te berekenen. In de laatste paragraaf van dit stuk zal ik laten zien hoe op met behulp van deze constructie de brandkrommen voor het geval van weerkaatsing aan een cirkel expliciet berekend kunnen worden. Voor alle berekeningen zal hierbij gebruik gemaakt worden van computer algebra. In dit geval heb ik mij daarbij van *Maple V, Release 2* bediend.

2. OMHULLENDEN

Veronderstel dat we een rechte lijn in het platte vlak hebben. We kunnen deze lijn volgens een bepaalde wetmatigheid bewegen. Stel dat deze beweging wordt bepaald door een parameter t . We krijgen zo een één-parameter familie van rechte lijnen Σ voort die wordt geparаметriseerd door, zeg t :

$$P_{\Sigma} : t \mapsto \{\bar{x} | \bar{x} = \bar{a}(t) + \lambda \bar{b}(t), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

met \bar{a} en \bar{b} vector-functies van t . We kunnen natuurlijk ook met een impliciete vergelijking voor de lijnen werken. We krijgen dan

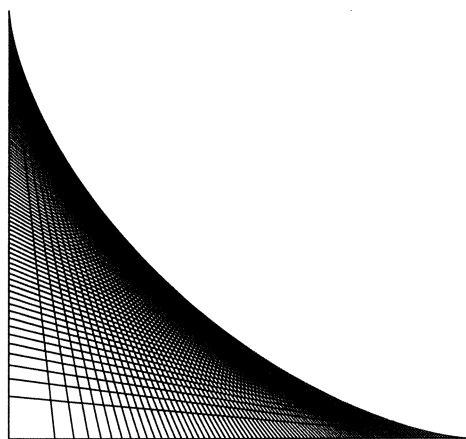
$$P_{\Sigma} : t \mapsto \{(x, y) | \frac{x}{f(t)} + \frac{y}{g(t)} = 1\},$$

met f en g (scalaire) functies van t .

Als voorbeeld van zo'n familie van rechte lijnen kunnen we een ladder nemen die langs een wand afglijdt (zie fig. (1)).

Nemen we de bodem als x -as en de wand als y -as en laat de lengte van de ladder gegeven zijn door r . Is α de hoek die de ladder maakt met de x -as dan kunnen we α als parameter nemen voor het systeem van alle posities die de ladder inneemt. Aan α voegen we dan een lijn ℓ_{α} toe, waarbij ℓ_{α} wordt gegeven door de vergelijking

$$\frac{x}{\cos(\alpha)} + \frac{y}{\sin(\alpha)} = r.$$



FIGUUR 1. Een afglijdende ladder

Beschouwen we nu alle mogelijke posities van een ladder met vaste lengte. We zien dat de ladder een gebied doorloopt dat begrensd wordt door een kromme die alle posities als het ware ‘omhult’. Het moge duidelijk zijn dat het bestaan van dergelijke krommen geen eigenschap is die uniek is voor de afglijdende ladder. In het algemeen zal een dergelijke kromme voor iedere één-parameter systeem van krommen in het platte vlak bestaan. Vanwege deze eigenschap van dergelijke krommen worden zij de omhullenden (*envelopes*, *enveloppes*, *Einhüllenden*) van een systeem genoemd. Het zijn deze omhullenden waar we in deze bijdrage in geïnteresseerd zijn.

De eerste vraag die wij ons natuurlijk moeten stellen is hoe we dergelijke krommen zouden kunnen bepalen. Op het eerste gezicht lijkt dit misschien een vrij moeilijk probleem, maar het wordt anders wanneer we ons probleem als een probleem in de drie-dimensionale ruimte zien. Merk op dat we eigenlijk bij ieder één-parameter systeem van lijnen, niet één maar twee parameters hebben. Behalve t (of α) hebben we ook nog de parameter λ van de lijn die aan t wordt toegekend. Aan ieder paar (t, λ) kunnen we dan een punt van het platte vlak toekennen. Zoals duidelijk zal zijn, gaat dit zeker niet eenduidig. Het mooie is echter dat juist deze eigenschap ons in staat stelt de omhullenden te berekenen.

Om dit in te zien moeten we eerst de lijnen als het ware uit elkaar trekken, om zo toch een één-één-duidige afbeelding op het systeem van lijnen te krijgen. We kunnen dit eenvoudig bereiken door een lijn ℓ_t van het systeem op een hoogte t te leggen. De aldus gepositioneerde lijnen vormen dan een oppervlak S dat door t en λ wordt geparаметriseerd. De projecties van de niveaulijnen van S zijn daarbij precies de lijnen van het systeem Σ en de omhullende van Σ is het contour van de projectie van S . Op zijn beurt bestaat het origineel van het contour van S weer precies uit die punten van S waarvoor de projectie op het xy -vlak niet (locaal)-inverteerbaar is. Een en ander levert ons twee

methoden om de omhullende van Σ te berekenen:

- Aangezien t en λ het oppervlak \mathcal{S} parametriseren moet gelden dat de afbeelding $P : (t, \lambda) \mapsto \bar{a} + \lambda \bar{b}$ niet inverteerbaar op het contour is. Voor de punten van het contour moet dus gelden

$$\det(\text{Jacobiaan}(P)) = \begin{vmatrix} \bar{a}_t + \lambda \bar{b}_t & \bar{b} \end{vmatrix} = 0.$$

Dit legt λ vast als functie van t en $P(t, \lambda(t))$ levert ons een parametrisering van de omhullende.

- Stel dat een lijn ℓ_t van Σ gegeven is door een vergelijking van de vorm

$$A(x, y, t) = a_{10}(t)x + a_{01}(t)y + a_{00}(t) = 0, \quad (1)$$

dan is deze vergelijking, met z voor t gesubstitueerd, ook meteen de vergelijking van het oppervlak \mathcal{S} . Voor de punten van het contour van \mathcal{S} moet dan gelden dat de normaal aan \mathcal{S} in deze punten loodrecht op de z -as staat. Dit betekent dat blijkbaar

$$\frac{\partial A}{\partial t}(x, y, t) = 0. \quad (2)$$

Uit vergelijkingen (1) en (2) kan nu t geëlimineerd worden. Dit geeft ons een impliciete vergelijking voor de omhullende.

VOORBEELD. We kunnen de tweede methode om omhullenden te berekenen direct toepassen om de omhullende voor ons ladder probleem te bepalen. De twee vergelijkingen waar we de parameter α uit moeten elimineren zijn respectievelijk

$$\frac{x}{\cos(\alpha)} + \frac{y}{\sin(\alpha)} = r$$

en

$$\sin^3(\alpha)x = \cos^3(\alpha)y.$$

Eliminatie van α levert nu direct de vergelijking

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

De kromme bij deze vergelijking staat bekend als de *astroïde*. We zouden de expliciete vergelijking voor de astroïde nog als een algebraïsche vergelijking kunnen schrijven, maar dat is ons op dit moment teveel werk. We zullen later een methode geven om deze algebraïsche vergelijking direct te verkrijgen.

Volgen we de eerste methode om omhullenden te bepalen, dan kunnen we de positie van de ladder bij een hoek α parametriseren door

$$\alpha \mapsto \{\bar{x} \mid \bar{x} = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) + \lambda \cos(\alpha) \\ -\lambda \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

en we vinden als parametrisering voor de omhullende

$$\alpha \mapsto (r \cos^3(\alpha), r \sin^3(\alpha)).$$

Het zal direct duidelijk zijn dat deze parametrisering dezelfde vergelijking voor de omhullende als boven levert.

Mutatis mutandis kunnen de omhullenden voor andere één-parameter systemen van krommen op analoge wijze berekend worden. Elk van de twee methoden om omhullenden te bepalen heeft zo zijn voordelen. Soms is de één handiger, soms de ander. Zijn we geïnteresseerd in impliciete vergelijkingen van de omhullenden dan moet in beide gevallen geëlimineerd worden. In het bovenstaande voorbeeld was die eliminatie geen probleem, maar in het algemeen zal dit anders liggen. Het is dus zaak een systematische methode te vinden om de parametriserings variabele te elimineren. Dankzij het feit dat wij computer algebra tot onze beschikking hebben kunnen wij hopen dat dergelijke systematische methoden ook nog praktisch uitvoerbaar zijn. Voor onze doeleinden zal een bepaalde eliminatie methode het meest werkbaar blijken te zijn, namelijk die van eliminatie met behulp van zogenaamde *resultanten*.

3. ELIMINATIE MET BEHULP VAN RESULTANTEN

De meest systematische methode om eliminatie methoden te lijf te gaan is zonder twijfel de herschrijving van de betreffende vergelijkingen als termen van een zogenaamde *Gröbnerbasis* (zie de bijdrage van Dr. Martens elders in deze bundel). Deze techniek blijkt een zeer krachtig instrument om ingewikkelde eliminaties van zeer verschillende uit te voeren. Echter, juist doordat deze techniek zo algemeen is, is zij niet bijzonder snel. Voor relatief eenvoudige eliminatie problemen is het dan ook vaak sneller om toevlucht te nemen tot minder algemene technieken. Onder deze minder algemene technieken is die van eliminatie met behulp van zogenaamde resultanten de belangrijkste.

Het idee van de resultante werd in 1840 geformuleerd door de Engelse wiskundige James Sylvester (1814-1897) in de context van diens onderzoekingen naar gemeenschappelijke wortels voor twee vergelijkingen in één variabele (zie: *Philosophical Magazine*, XVI (1840), pp.132-5). De waarde van deze door Sylvester gedefiniëerde resultante van twee vergelijkingen in een variabele geeft uitsluitel over het al dan niet aanwezig zijn van gemeenschappelijke wortels. Ik wil hier nog niet ingaan op de relatie die dit heeft met eliminatie theorie. In plaats daarvan wil ik beginnen het idee van resultante te preciseren. We hebben eerst een lemma nodig. Zij k hierbij een willekeurige ring.

LEMMA 1. *Laten $f, g \in k[x]$ polynomen van respectievelijk graad $l > 0$ en $m > 0$ zijn. Er geldt dat f en g dan en slechts dan een factor gemeenschappelijk hebben wanneer er polynomen $A, B \in k[x]$ bestaan zodanig dat*

1. A en B beide ongelijk nul
2. A heeft hoogstens graad $m - 1$ en B hoogstens graad $l - 1$
3. $Af + Bg = 0$

BEWIJS direct. □

Hoe bovenstaande resultanten gebruikt kunnen worden om variabelen te elimineren is nu niet meer al te moeilijk in te zien. We hebben

STELLING 2. *Laten F en G twee polynomen $\in \mathbb{R}[x, y, t]$ zijn. We kunnen F en G ook opvatten als polynomen in $(\mathbb{R}[y, x])[t]$. Er geldt nu dat F en G dan en slechts dan gemeenschappelijke punten hebben wanneer*

$$\text{Res}(F, G, t) = 0.$$

Met andere woorden, $\text{Res}(F, G, t) = 0$ is de vergelijking die resulteert uit de eliminatie van t uit $F = 0$ en $G = 0$. In het bijzonder levert eliminatie van t uit $F = 0$ en $G = 0$ weer een polynoom.

BEWIJS. direct. □

In vrijwel ieder computer algebra pakket is de mogelijkheid tot het nemen van resultanten geïmplementeerd. Op voorwaarde dat de uitdrukkingen waaruit geëlimineerd moet worden niet al te groot zijn levert deze mogelijkheid een doorgaans zeer werkbare eliminatie methode.

VOORBEELD. Laten we nogmaals naar ons ladder probleem kijken. We hadden daar de vergelijkingen (1) en (2). Deze twee vergelijkingen zijn niet-polynomiaal, maar deze moeilijkheid is met een geijkte truck te ondervangen. Schrijven we $t = \tan(\alpha/2)$, dan hebben we

$$\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

We kunnen Maple gebruiken om deze uitdrukkingen in (1) en (2) en om de teller te bepalen van de aldus verkregen expressies. We krijgen zo de twee uitdrukkingen

$$F = -2xt - 2xt^3 - y + yt^4 + 2rt - 2rt^3,$$

$$G = 8xt^3 - y + 3yt^2 - 3yt^4 + yt^6.$$

Deze twee vergelijkingen zijn wel van de juiste vorm en eliminatie van t met behulp van de resultante levert de vergelijking

$$\begin{aligned} & -4096y^2x^2 \cdot (-3r^2y^4 + 21r^2y^2x^2 - \\ & 3r^2x^4 + 3r^4y^2 - r^6 + 3r^4x^2 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 + y^6) = 0. \end{aligned}$$

Natuurlijk is hierbij alleen het stuk tussen haakjes van belang. Nemen we deze factor en ordenen we deze naar de lengte van de ladder, dan komen we uiteindelijk uit op de vergelijking

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + 3yx + y^2)(x^2 - 3yx + y^2)r^2 + (3y^2 + 3x^2)r^4 = r^6.$$

Dezelfde uitdrukking zouden we gevonden hebben wanneer we direct onze eerder gevonden uitdrukking voor de gezochte omhullende als algebraïsch polynoom hadden uitgeschreven. Waarschijnlijk zou dit alleen toch wel wat gepuzzel hebben gevergd. Alles bij elkaar hebben de berekeningen zoals ik die in Maple heb uitgevoerd slechts een paar seconden in beslag genomen.

4. EEN TOEPASSING: DE THEORIE VAN BRANDKROMMEN

Het is nu hoog tijd de voorgaande theorie op een wat groter probleem dan dat van de afglijdende ladder toe te passen. Een mijns inziens heel aardig voorbeeld van zo'n probleem wordt geboden door de zogenaamde brandkrommen.

Laten we ons voor het gemak weer tot het platte vlak beperken. Stel dat we een punt P hebben van waaruit lichtstralen worden uitgezonden. We zullen het één-dimensionale systeem van lichtstralen aanduiden met Σ . Nemen we aan dat de stralen van Σ gebroken of weerkaatst worden aan een kromme C . Het resulterende systeem van lichtstralen duiden we aan met Σ' .

In het algemeen zullen de stralen van Σ' niet meer in één enkel punt P' verenigen. Met andere woorden, we hebben geen *brandpunt* (*focus*, *point focal*, *Brennpunkt*) waarin het weerkaatste of gebroken licht zich concentreert. In plaats daarvan zal het systeem wel over een omhullende beschikken. Deze omhullende zou gezien kunnen worden als de locus van die punten waar de intensiteit van het weerkaatste of gebroken licht het hoogste is. Op grond hiervan wordt de omhullende van Σ' doorgaans als de *brandkromme* (*caustics*, *caustiques*, *Brennkurven*/*Kaustiken*) aangeduid. De vroegste studies naar brandkrommen dateren uit het einde van de 17de eeuw; een systematische theorie werd eerst in de vroege 19de eeuw opgezet. (Voor de geschiedenis van de brandkrommen, zie [2]).

Willen we de brandkromme bij een punt P en een kromme C berekenen, dan zullen we eerst het systeem Σ' moeten bepalen. Het recept hiervoor lijkt eenvoudig. Voor een willekeurige lichtstraal uit P bepalen we eerst het snijpunt Q van de straal met C . Vervolgens gebruiken we de wet van Snellius om de weerkaatste of gebroken straal te berekenen.

STELLING 3. *Laat gegeven zijn een lichtstraal die een kromme C in een punt Q treft. Laat α en α' de hoek van respectievelijk de invallende en de uitvallende lichtstraal met de normaal aan C in Q zijn. Er geldt*

$$\frac{\sin(\alpha)}{\lambda} = \frac{\sin(\alpha')}{\lambda'}.$$

Hierbij verhouden λ en λ' zich als de lichtsnelheden in het ingaande en het uitgaande medium. In het geval van weerkaatsing nemen we $\lambda = 1$, $\lambda = -1$.

In principe zou de wet van Snellius voldoende moeten zijn om het gebroken of weerkaatste systeem Σ' volledig te bepalen. In de praktijk zorgen de wortels die genomen moeten worden ervoor dat de berekeningen bijzonder onoverzichtelijk worden. Het optreden van wortels betekent ook dat computer algebra nauwelijks bruikbaar zal zijn om Σ' volgens deze directe methode te bepalen.

Vrijwel alle computer algebra pakketten zijn bijzonder onbetrouwbaar wanneer er gemanipuleerd moet worden met wortels.

Een oplossing voor deze moeilijkheid wordt geboden door de brandkrommen te karakteriseren als zogenaamde *middelpuntskrommen of ontwonden* bij een eenvoudig te construeren ‘hulp’-kromme. Deze krommen zijn de omhullenden van het systeem van normalen aan een kromme. Deze methode wordt wel de constructie van Quetelet genoemd, naar de Zuid-Nederlandse wiskundige en statisticus Adolphe Quetelet (1796–1874), die het eerst met het idee voor deze aanpak kwam.

4.1. Quetelet's constructie

Laten we nogmaals de situatie met een invallend systeem van lichtstralen Σ en een uitvallend systeem Σ' bekijken. Voor elk van beide systemen bestaat er een één-dimensionale familie van zogenaamde *orthogonale trajectoriën*, dat wil zeggen een familie van krommen die de lichtstralen van Σ of Σ' steeds loodrecht snijden. In de fysica staan deze orthogonale trajectoriën bekend als *golf-fronten*.

Zij nu gegeven een kromme C en een invallend systeem van lichtstralen Σ . Zij Σ' het systeem van lichtstralen resulterend uit de breking van de stralen van Σ aan C . De punten Q van C parametriseren zowel Σ als Σ' . We kunnen zodoende een lichtstraal van Σ aanduiden met ℓ_Q en de corresponderende lichtstraal van Σ' met ℓ'_Q . Stel nu dat we voor zowel Σ als Σ' een golf-front hebben. We duiden deze aan met respectievelijk \mathcal{W} en \mathcal{W}' . Zij W_Q het snijpunt van ℓ_Q met \mathcal{W} en W'_Q dat van ℓ'_Q met \mathcal{W}' . De gewogen lengte

$$\frac{W_Q Q}{\lambda} + \frac{Q W'_Q}{\lambda'},$$

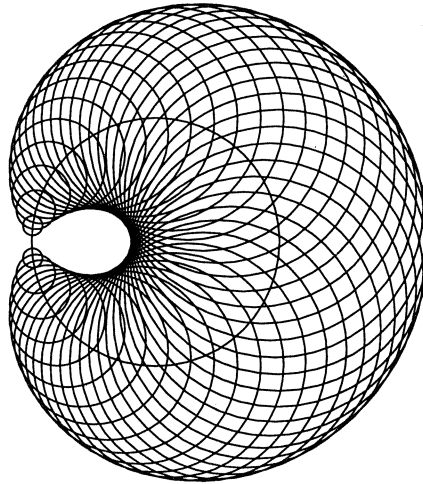
met λ en λ' als in de wet van Snellius, wordt nu wel de *optische weglengte* tussen W_Q en W'_Q genoemd. Er geldt

STELLING 4. *Voor ieder paar golf-fronten \mathcal{W} en \mathcal{W}' en λ' als boven is de optische weglengte tussen corresponderende punten van de golf-fronten constant. Omgekeerd, laat gegeven zijn een golf-front \mathcal{W} , een oppervlak \mathcal{W}' en een oppervlak \mathcal{F} zodanig dat er voor alle punten Q van \mathcal{F} punten W_Q en W'_Q op respectievelijk \mathcal{W} en \mathcal{W}' bestaan waartussen de optische weglengte langs Q constant is, dan is \mathcal{W}' een golf-front bij breking van de stralen bij \mathcal{W} aan \mathcal{F} .*

BEWIJS. Zie bijv. [1]. □

Een bijzondere toepassing krijgen we wanneer we bij een golf-front \mathcal{W} een golf-front \mathcal{W}' willen vinden waarvoor de optische weglengte tussen de corresponderende punten altijd gelijk nul is. In het geval van een puntbron zoals we die tot nog toe bestudeerd hebben nemen we dan gemakshalve de puntbron zelf als \mathcal{W} . We kunnen nu een eenvoudige meetkundige constructie aangeven voor het gezochte golf-front. Immers, voor alle punten Q op C moet gelden dat

$$\frac{PQ}{\lambda} = -\frac{QW'_Q}{\lambda'}.$$



FIGUUR 2. Quetelet's constructie voor $\lambda'/\lambda = 3/5$ en $p = -R$

Laten we nu om ieder punt Q van C een cirkel slaan met een straal R_Q gegeven door

$$R_Q = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot PQ.$$

Er volgt onmiddellijk dat het gezochte golf-front op de omhullende van deze één-parameter familie van cirkels moet liggen. Uit tekenoverwegingen volgt dat in het geval van breking dat deel van de omhullende dat ten opzichte van C aan de kant van P ligt, het gezochte golf-front is. In het geval van weerkaatsing moeten we juist het andere stuk van de omhullende nemen.

Bovenstaande constructie werd in 1825 door Quetelet gesuggereerd (zie: *Annales des mathématiques pures et appliquées* 15 (1824-5), pp.345-58). De aldus geconstrueerde golf-fronten duidde hij aan met de term *secundaire brandkrommen*. Een interessante eigenschap van de secundaire brandkrommen is dat deze relatief eenvoudig te berekenen zullen zijn. Dit betekent dat de brandkrommen gezien kunnen worden als omhullenden van de familie van normalen aan bekende (en waarschijnlijk niet al te gecompliceerde) krommen. Voor de bepaling van dergelijke omhullenden laat zich een eenvoudig recept aangeven dat wederom op eliminatie uit polynomiaal vergelijkingen berust. Het blijkt dus dat de vervelende wortels waar we in het begin mee zaten op een heel elegante manier zijn te vermijden. Daarmee zijn de brandkrommen natuurlijk nog niet bekend, maar ze zijn wel een beetje minder raadselachtig geworden.

4.2. De bepaling van de secundaire brandkrommen voor een cirkel

Om te zien tot wat voor soort berekeningen bovenstaande constructie van de secundaire brandkrommen voert, is het het beste eens een concreet voorbeeld aan te pakken. Laten we hiertoe het geval van breking of weerkaatsing aan een cirkel nemen.

Stel dat we een cirkel \mathcal{C} met straal R rond de oorsprong hebben. We parametriseren \mathcal{C} met behulp van pool-coördinaten

$$x = R \cos(\alpha), \quad y = R \sin(\alpha).$$

Voorts nemen we aan dat de lichtbron P coördinaten $(p, 0)$ heeft. Het volgt nu onmiddellijk dat de secundaire brandkromme op de omhullende van die familie van cirkels moet liggen die geparametriseerd wordt door

$$\begin{aligned} \alpha \mapsto \mathcal{C}_\alpha = & \quad (3) \\ \{ \bar{x} \mid (x - R \cos(\alpha))^2 + (y - R \sin(\alpha))^2 = & \\ (\lambda'/\lambda)^2 ((R \cos(\alpha) - p)^2 + (R \sin(\alpha))^2) \}, & \end{aligned}$$

met λ en λ' als in de wet van Snellius. Differentiëren van de vergelijking voor \mathcal{C}_α naar α levert

$$\begin{aligned} 2(x - R \cos(\alpha)) R \sin(\alpha) - 2(y - R \sin(\alpha)) R \cos(\alpha) = & \quad (4) \\ \frac{\lambda'^2 (-2(R \cos(\alpha) - p) R \sin(\alpha) + 2R^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha))}{\lambda^2}. & \end{aligned}$$

We kunnen nu Maple $t = \tan(\alpha/2)$ in laten vullen. Voor de teller van de zo verkregen uitdrukking vinden we dan de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \lambda^2 x^2 t^2 + 2t^2 \lambda^2 x R + \lambda^2 R^2 t^2 - \lambda'^2 R^2 t^2 - 2t^2 \lambda'^2 R p + \lambda^2 y^2 t^2 & \quad (5) \\ -\lambda'^2 p^2 t^2 - 4\lambda^2 y R t + \lambda^2 x^2 + \lambda^2 R^2 - 2\lambda^2 x R + & \\ 2\lambda'^2 R p + \lambda^2 y^2 - \lambda'^2 R^2 - \lambda'^2 p^2 = 0 & \end{aligned}$$

en

$$2(\lambda^2 y t^2 + 2t \lambda^2 x - 2\lambda'^2 t p - \lambda^2 y) R = 0. \quad (6)$$

Eliminatie van t uit beide vergelijkingen met behulp van de resultante, tenslotte, voert tot de tamelijk onhandelbare vergelijking

$$\begin{aligned} -8\lambda^8 y^4 R^2 - 8\mu^8 p^4 R^2 + 4\mu^8 p^2 R^4 + 4\lambda^8 y^2 R^4 + 4\lambda^8 x^2 R^4 + 12\lambda^8 y^4 x^2 + & \\ 4\lambda'^8 p^6 + 12\lambda^8 y^2 x^4 - 8\lambda^6 y^2 R^4 \lambda'^2 - 8\lambda^6 x^2 R^2 \lambda'^2 p^2 - 8\lambda^6 x^2 R^4 \lambda'^2 + & \\ 4\lambda^8 x^6 + 4\lambda^8 y^6 - 16\lambda^8 y^2 R^2 x^2 - 8\lambda^6 y^2 R^2 \lambda'^2 p^2 - 8\lambda^8 x^4 R^2 - & \\ 8\lambda^6 y^4 \lambda'^2 p^2 - 8\lambda'^6 p^2 R^2 \lambda^2 y^2 - 8\lambda'^6 p^2 R^2 \lambda^2 x^2 - 8\lambda'^6 p^2 R^4 \lambda^2 - & \\ 16\lambda^6 y^2 x^2 \lambda'^2 p^2 - 16\lambda^6 y^2 x^2 \lambda'^2 R^2 - 8\lambda^6 y^4 \lambda'^2 R^2 - 8\lambda^6 x^4 \lambda'^2 p^2 - & \\ 8\lambda^6 x^4 \lambda'^2 R^2 - 8\lambda'^6 p^4 \lambda^2 y^2 - 8\lambda'^6 p^4 \lambda^2 x^2 - 8\lambda'^6 p^4 \lambda^2 R^2 + 4\lambda^4 y^2 \lambda'^4 p^4 - & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16\lambda^4 y^2 \lambda'^4 p^2 R^2 + 4\lambda^4 y^2 \lambda'^4 R^4 + 16\lambda^4 x \lambda'^4 p^3 y^2 - 8\lambda^2 x \lambda'^6 p^5 + \\
& 16\lambda^4 x^3 \lambda'^4 p^3 + 16\lambda^4 x \lambda'^4 p^3 R^2 + 48\lambda^2 x \lambda'^6 p^3 R^2 - 80\lambda^4 x^2 \lambda'^4 R^2 p^2 + \\
& 4\lambda^4 x^2 \lambda'^4 R^4 - 16\lambda^6 x^3 \lambda'^2 p y^2 - 8\lambda^6 x^5 \lambda'^2 p + 48\lambda^6 x^3 \lambda'^2 p R^2 + \\
& 16\lambda^4 x^3 \lambda'^4 p R^2 + 48\lambda^6 x \lambda'^2 p R^2 y^2 - 8\lambda^6 x \lambda'^2 p R^4 + 16\lambda^4 x \lambda'^4 p R^4 + \\
& 4\lambda^4 x^2 \lambda'^4 p^4 + 8\lambda'^4 p^2 \lambda^4 x^2 y^2 + 4\lambda'^4 p^2 \lambda^4 x^4 + 4\lambda'^4 p^2 \lambda^4 R^4 + \\
& 4\lambda'^4 p^2 \lambda^4 y^4 + 16\lambda^4 x \lambda'^4 p R^2 y^2 - 8\lambda^2 x \lambda'^6 p R^4 - 8\lambda^6 x \lambda'^2 p y^4 = 0.
\end{aligned}$$

Op het eerste gezicht een hopeloze uitdrukking, maar gelukkig biedt Maple ook de mogelijkheid tot het factoriseren van een polynomiale expressie. Zoals we stiekem gehoopt (en eigenlijk al een beetje verwacht) hadden, blijkt de uitdrukking factoriseerbaar te zijn. We vinden

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda'^4 p^2 - 2\lambda^2 x \lambda'^2 p + \lambda^4 x^2 + \lambda^4 y^2 \right) \\
& \left(\lambda^4 x^4 + 2\lambda^4 y^2 x^2 - 2x^2 \lambda^4 R^2 - 2x^2 \lambda'^2 p^2 \lambda^2 - 2x^2 \lambda^2 \lambda'^2 R^2 + 8\lambda'^2 p \lambda^2 R^2 x \right. \\
& + \lambda^4 R^4 - 2\lambda^4 y^2 R^2 + \lambda^4 y^4 - 2\lambda^2 R^4 \lambda'^2 - 2\lambda^2 y^2 \lambda'^2 R^2 - 2\lambda'^2 p^2 \lambda^2 y^2 - \\
& \left. 2\lambda^2 R^2 \lambda'^2 p^2 + \lambda'^4 p^4 + \lambda'^4 R^4 - 2\lambda'^4 R^2 p^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

De eerste van de twee resulterende vergelijkingen heeft slechts een punt als reële oplossing en de omhullende wordt blijkbaar gegeven door de tweede vergelijking. Met enige manipulatie met Maple kunnen we deze formule aanzienlijk vereenvoudigen. Schrijven we

$$\begin{aligned}
A &= \lambda^2(x^2 + y^2) - (\lambda'^2 p^2 + (\lambda^2 + \lambda'^2)R^2), \\
B &= 2\lambda^2 p x - (\lambda^2 R^2 + (\lambda^2 + \lambda'^2)p^2),
\end{aligned}$$

dan vinden we als vergelijking voor de secundaire brandkromme

$$A^2 + 4\lambda'^2 R^2 B = 0.$$

De kromme is van graad vier en zal behalve voor $p = 0$ (het geval dat het licht uit de oorsprong straalt) niet ontaard zijn. In het algemeen zal de kromme zich ook niet rationaal laten parametriseren, dat wil zeggen, er bestaat doorgaans geen parametrisering van de vorm

$$t \mapsto (f_1(t), f_2(t)),$$

met f_1 en f_2 rationale polynomen in t . We kunnen al vermoeden dat dit het geval zal zijn door uit de vergelijkingen (5) en (6) niet t maar x of y te elimineren. Voor y krijgen we dan de eenvoudigste vergelijking:

$$(t^2 + 1)^2 y^2 \lambda^4 - 4 \left(Rt^2 \lambda^2 + pt^2 \lambda'^2 + R\lambda^2 - p\lambda'^2 \right) yt\lambda^2 - 4 (\lambda' - \lambda) (\lambda' + \lambda) (R\lambda - p\lambda') (R\lambda + p\lambda') t^2 = 0.$$

De y -variabele uitgedrukt als functie van t zal dus over het algemeen weer wortels bevatten. Voor x geldt hetzelfde. Dit zal alleen dan niet het geval zijn wanneer de discriminant D van de kwadratische vergelijking in y een kwadraat in $R[t]$ is. We kunnen voor de bepaling van de voorwaarden waaronder we zo'n kwadraat hebben weer gerust op Maple vertrouwen en na enige bewerking vinden we

$$D = (R + p)^2 t^4 \lambda^2 + \left(2R^2 \lambda^2 - 4p^2 \lambda'^2 + 2p^2 \lambda^2 \right) t^2 + (R - p)^2 \lambda^2$$

Deze uitdrukking is een kwadratisch polynoom in t^2 en zal dan en slechts dan een kwadraat in $R[t]$ vormen wanneer de bijbehorende discriminant D_t gelijk nul is. Uitwerken en factoriseren levert

$$D_t = -16 (\lambda' - \lambda) (\lambda' + \lambda) (R\lambda - \lambda'p) (R\lambda + \lambda'p).$$

Er zijn dus minstens vier speciale situaties waarvoor we wel een rationale parametrisering van de secundaire brandkromme hebben. Wanneer $\lambda = \lambda'$ treedt er natuurlijk helemaal geen breking of weerkaatsing op. Het geval $\lambda = -\lambda'$ correspondeert met weerkaatsing. De duiding van de andere twee gevallen vraagt meer denkwerk. Het blijkt dat we te maken hebben met de zogenaamde *aplanatische* punten bij een cirkel. Dit zijn de unieke twee punten in het platte vlak met de eigenschap dat alle lichtstralen uit deze punten weer in een punt verenigen na breking aan een cirkel. Deze punten werden voor het eerst gesignaleerd door Christiaan Huygens in 1654. Het is een interessante oefening om na te gaan dat de tak van de secundaire brandkromme waar de gebroken lichtstralen normalen aan zijn in deze gevallen reduceert tot een geïsoleerd punt. De brandkromme zelf bestaat dan natuurlijk ook alleen uit dit ene punt. (Voor een bewijs van het bestaan van aplanatische punten aan een cirkel, zie [4], p. 36.).

Laten we het geval van weerkaatsing nader bekijken. We zouden bijvoorbeeld de rationale parametrisering van de secundaire brandkromme kunnen gebruiken om voor dit geval de brandkrommen zelf te berekenen.

4.3. De brandkrommen bij weerkaatsing aan een cirkel

Voor het geval van weerkaatsing kunnen we eenvoudig een rationale parametrisering voor de secundaire brandkromme bepalen. Achtereenvolgende eliminatie van y en x uit (3) en (4) levert

$$x = -\frac{(-2 + 2t^2)R}{t^2 + 1} - \frac{(t^4 - 6t^2 + 1)p}{(t^2 + 1)^2}, \quad y = \frac{4Rt}{t^2 + 1} + \frac{4t(t^2 - 1)p}{(t^2 + 1)^2}.$$

Rekenen we terug naar de oorspronkelijke $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$, dan zien we dat

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2R \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Het is niet al te moeilijk in te zien dat de secundaire brandkromme voor het geval van weerkaatsing gevonden kan worden door een cirkel met straal R om een tweede cirkel met dezelfde straal te rollen. De secundaire brandkromme zal dan de baan zijn die wordt beschreven door een punt op afstand $-p$ van het middelpunt van de eerste cirkel (zie voor deze krommen ook de bijdrage van Drs. P. Drijvers elders in deze bundel). Dat we op deze meetkundige constructie voor de secundaire brandkromme stuiten is overigens géén toeval. Sterker nog, een dergelijke constructie was in 1694 voor Jacob Bernoulli het uitgangspunt voor diens onderzoekingen naar de eigenschappen van brandkrommen. Het zou evenwel te ver voeren hier nader op in te gaan (zie hiervoor [2], waar ook de verwijzing naar de originele artikelen van Jacob Bernoulli).

De bepaling van de normalen aan deze kromme is vervolgens een koud kunstje. Voeren we het hele procedé voor de bepaling van de omhullende aan de familie van normalen uit met $t = \tan(\alpha/2)$ dan vinden we als parameter voorstelling voor de omhullende

$$t \mapsto \left(-\frac{\left((t^2 + 1)^3 R + (t - 1)(t + 1)(t^4 + 10t^2 + 1)p \right) Rp}{(t^2 + 1)^2 \left((t^2 + 1)R^2 + 3(t - 1)(t + 1)Rp + (2t^2 + 2)p^2 \right)}, \right. \\ \left. \frac{16p^2 Rt^3}{(t^2 + 1)^2 \left(3(t - 1)(t + 1)Rp + (t^2 + 1)R^2 + (2t^2 + 2)p^2 \right)} \right).$$

Rekenen we weer terug naar α dan krijgen we voor de coördinaten (x, y) van de brandkrommen

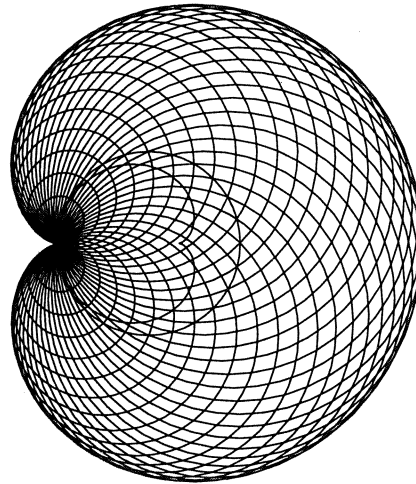
$$x = \frac{-pR(R - p \cos(\alpha)(3 - 2 \cos^2(\alpha)))}{-3pR \cos(\alpha) + R^2 + 2p^2}, \quad y = \frac{2p^2 R \sin^3(\alpha)}{-3pR \cos(\alpha) + R^2 + 2p^2}.$$

We kunnen ook de impliciete vergelijking uitrekenen die bij deze parametrisering hoort, maar erg mooi valt deze niet te maken. We zien wel dat de brandkrommen in het algemeen van graad zes zullen zijn. Echter, voor bijzondere gevallen is een lagere graad mogelijk. Een dergelijke reductie van de graad treedt bijvoorbeeld op voor het geval $p = -R$. We vinden hier

$$x = \left(\frac{2}{3} \cos(\alpha) \right) - \frac{1}{3} \cos(2\alpha))R, \quad y = \left(\frac{2}{3} \sin(\alpha) - \frac{1}{3} \sin(2\alpha) \right)R.$$

Maar de kromme bij deze vergelijking is gelijkvormig met de secundaire brandkromme voor $p = -R$ en voor $p = R$! Net als de secundaire brandkromme zou de brandkromme zelf dus van graad vier moeten zijn. Bepalen we de impliciete vergelijking, dan vinden we voor deze

$$-27(y^2 + x^2)^2 + R^4 + (18x^2 + 18y^2)R^2 - 8R^3x = 0.$$



FIGUUR 3. (Primaire) en secundaire brandkromme voor breking met $p = -R$

Voor dit geval wordt de brandkromme dus inderdaad een kromme van graad vier. Met dit voorbeeld wilde ik mijn verhaal beëindigen.

5. BESLUIT

In het voorgaande hebben we gezien hoe computer algebra gebruikt kan worden om ons omvangrijk rekenwerk uit handen te nemen. Door handig gebruik te maken van de mogelijkheden die Maple ons biedt zijn we bovendien in staat veel sneller inzicht te krijgen in de aard van gegeven vergelijkingen en de bijbehorende krommen. Dit geeft ons de mogelijkheid eenvoudiger door te dringen tot de kern van allerlei ingewikkelde wiskundige mogelijkheden.

Naast de vergroting van de puur rekentechnische capaciteit binnen het wiskundig onderzoek, opent het gebruik van computer algebra ook binnen het wiskunde onderwijs nieuwe horizons. Het lijkt mij niet overdreven te stellen dat het gebruik van computer algebra een geheel nieuwe klasse van problemen binnen het bereik van het wiskunde onderwijs op de middelbare scholen brengt. Waar anders het rekenwerk een onoverbrugbare barrière gevormd zou hebben voor introductie in de klas, kan nu alle aandacht uitgaan naar de theorie achter het rekenwerk.

De theorie van brandkrommen is natuurlijk conceptueel te ingewikkeld om in alle volledigheid ook aan leerlingen op een middelbare school te presenteren. Ik hoop echter dat ik met mijn verhaal duidelijk heb gemaakt op wat voor manier computer algebra gebruikt zou kunnen worden om de klassieke technieken waar de theorie op berust op een aansprekende manier weer in het onderwijs te introduceren.

REFERENTIES

1. E.J. ATZEMA, *The Structure of Systems of Lines in 19th Century Geometrical Optics: Malus' Theorem and the Description of the Infinitely Thin Pencil* (Ph.-D. Utrecht, 1993)

2. F. BÖSSER, “Die Theorie der caustischen Linien und Fläche in ihrer geschichtlichen Entwicklung,” *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (1) 15 (1870), pp. 170–206
3. D. COX, J. LITTLE, D. O’SHEA, *Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra* (Springer, 1992)
4. E. T. WHITTAKER, *The Theory of Optical Instruments* (= *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*, no. 7) (C.U.P., 1915)

Het oplossen van polynoomvergelijkingen

F.J.L. Martens

1. INLEIDING

Beschouw het stelsel polynoomvergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - y + z^2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

in de onbekenden x, y en z .

Dit stelsel heeft vier oplossingen waarvan er twee reëel zijn. Het oplossen lukt omdat een van de vergelijkingen eenvoudig is.

Het vervangen van de derde vergelijking door $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ maakt het stelsel veel moeilijker. Met potlood en papier is dit praktisch onoplosbaar. Met een computeralgebrasysteem is zo'n stelsel wel op te lossen. We gaan op de achtergrond hiervan in.

Het oplossen van stelsels polynoomvergelijkingen is een belangrijk onderwerp in de algebra. In grote lijnen zijn er twee manieren ontwikkeld om stelsels polynoomvergelijkingen aan te pakken:

- * De resultantenmethode,
- * De methode gebaseerd op Gröbnerbases.

Er is hier sprake van aanpakken omdat in feite zo'n stelsel polynoomvergelijkingen wordt vervangen door een equivalent stelsel waaruit de oplossingen dan hopelijk gemakkelijker zijn af te lezen.

De tweede methode is het meest geschikt voor automatisering, vooral omdat bij gebruik hiervan blijkt of het stelsel oplosbaar of strijdig is. De meeste computeralgebrasystemen gebruiken deze methode.

Wat de geschiedenis betreft zij opgemerkt dat de theorie erachter ontwikkeld is in de zestiger jaren door H. Hironaka en B. Buchberger.

2. STELSELS POLYNOOMVERGELIJKINGEN

We schetsen het algemene probleem:

Beschouw de polynomen p_1, p_2, \dots, p_k in de ring $R[x, y, z]$ met R het lichaam van de rationale getallen \mathbb{Q} of van de reële getallen \mathbb{R} .

Het stelsel polynoomvergelijkingen is

$$\begin{cases} p_1(x, y, z) = 0 \\ p_2(x, y, z) = 0 \\ \dots \\ p_k(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

De oplossingen zijn elementen $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ die voldoen aan

$$p_1(a, b, c) = p_2(a, b, c) = \dots = p_k(a, b, c) = 0.$$

Alle oplossingen van het stelsel moeten bepaald worden.

OPMERKING: De beperking tot drie variabelen is geen wezenlijke beperking.

Alvorens de aanpak in het algemeen te schetsen bekijken we eerst stelsels lineaire vergelijkingen. De linkerkolom bevat stelsels die moeten worden opgelost met de methode van Gauss-Jordan. Dat wil zeggen dat zoveel mogelijk kolommen moeten worden schoongeveegd. De ernaast staande stelsels in de rechterkolom zijn de eindresultaten van het vegen.

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x & - 1 = 0 \\ y & - 1 = 0 \\ z & - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ x + 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x & - 1 = 0 \\ y + z & - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ x + 3y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x & - 1 = 0 \\ y + z & - 2 = 0 \\ & 1 = 0 \end{cases}$$

Men kan er ook als volgt tegenaan kijken. Hier staan vergelijkingen met lineaire polynomen. De polynomen zijn zo opgeschreven dat de termen met x voor de termen met y , die met y voor die met z , die met z voor de constante termen staan. De eerste term van een polynoom noemen we een kopterm. Een stelsel aan de linkerkant wordt opgelost door zo'n stelsel te vervangen door een stelsel met zoveel mogelijk verschillende koptermen. Bij stelsels lineaire vergelijkingen levert dit altijd resultaat op. We merken op dat voor stelsels lineaire vergelijkingen geldt:

- * Het equivalente stelsel heeft een constante kopterm. \Leftrightarrow Het stelsel is strijdig.
- * Het equivalente stelsel heeft alleen 3 niet-constante koptermen met x, y en z . \Leftrightarrow Het stelsel heeft precies een oplossing.
- * Het equivalente stelsel heeft alleen 2 of minder niet-constante koptermen. \Leftrightarrow Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen.

Het kunnen aflezen van het aantal oplossingen komt nog eens terug.

3. DE AANPAK VAN STELSELS POLYNOMVERGELIJKINGEN

De techniek van het oplossen wordt van de grond af aan opgebouwd. Het eerste punt is het eenduidig weergeven van de polynomen. Hiertoe worden ordeningen op de monomen, d.w.z. termen van de vorm $m = x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$ gebruikt, die

ook dienst doen bij het vereenvoudigen van stelsels vergelijkingen. Dit soort ordeningen heet reductie-ordeningen.

Een reductie-ordening $<$ is een ordening op de monomen met de eigenschappen

$$* \quad \forall_m [1 \leq m] .$$

$$* \quad \forall_{m, m_1, m_2} [m_1 \leq m_2 \Rightarrow m_1 m \leq m_2 m] .$$

Opmerking: $1 = x^0 y^0 z^0$.

Een reductie-ordening is een verfijning van "het deler zijn van":

$$m_1 | m_2 \Rightarrow m_1 \leq m_2 .$$

Een voorbeeld van een reductie-ordening is de lexicografische ordening:

$$x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} < x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} :\Leftrightarrow (l_1 - k_1, l_2 - k_2, l_3 - k_3) \neq (0, 0, 0) \text{ en}$$

de eerste niet - nulcomponent is positief.

Er geldt o.a. :

$$xy^2z < x^2yz^2 < x^4$$

en

$$z < y < x .$$

Het is duidelijk dat dit niet een kwestie is van het woordenboek van achteren naar voren lezen of andersom. Het lexicografische slaat op de exponenten. Er zijn ook andere reductie-ordeningen mogelijk:

$$x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} < x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} :\Leftrightarrow r^{k_1+k_2+k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} < r^{l_1+l_2+l_3} x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} .$$

(met $z < y < x < r$)

of

$$x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} < x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} :\Leftrightarrow 2^{k_1} 3^{k_2} 5^{k_3} < 2^{l_1} 3^{l_2} 5^{l_3} .$$

Hier gebruiken we de lexicografische ordening. De polynomen worden zo opgeschreven dat de termen met behulp van de monomen van hoog naar laag geordend zijn. De constante term staat altijd achteraan. De eerste term van het polynoom heet de kopterm.

$$\text{Beschouw het stelsel } A = \begin{cases} p = x^3 + x^2 y^2 + 3 = 0 \\ q = x^2 y / 3 + x = 0 \\ \dots \end{cases}$$

De koptermen van p en q zijn respectievelijk x^3 en $x^2 y / 3$. Er zijn twee soorten manipulaties met stelsels vergelijkingen:

a. Reductie van vergelijkingen:

Omdat $x^2y|x^2y^2$, is $r = p - 3yq = x^3 - 3xy - 3y + 3$ een polynoom, wat in zekere zin eenvoudiger is dan p omdat de term x^2y^2 vervangen is door termen met kleinere monomen. Het polynoom p is gereduceerd tot het polynoom r . We geven dit aan met $p \rightarrow r$. Meestal kan r nog verder gereduceerd worden desnoods met andere polynomen van het stelsel. We merken op dat het reduceren van een polynoom een eindig proces is.

Het stelsel A is equivalent met het stelsel

$$\begin{cases} r = 0 \\ q = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Deze vorm van manipulatie is voldoende om stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen.

b. Uitbreiding van aantal vergelijkingen:

De koptermen van p en q hebben kleinste gemene veelvoud x^3y . Het s -polynoom $s(p, q) = yp - 3xq = x^2y^3 - 3x^2 - 3x + 3y$ is de eenvoudigste combinatie waarbij de koptermen van p en q tegen elkaar wegvallen. Meestal kan dit s -polynoom nog verder worden gereduceerd. Hier zien we dat $s(p, q)$ met behulp van q kan worden gereduceerd tot

$-3x^2 - 3xy^2 - 3x - 3y^2 + 3y$. We breiden het stelsel A alleen uit als het polynoom s , dat men verkrijgt door zoveel mogelijk het s -polynoom $s(p, q)$ te reduceren, ongelijk het nulpolynoom is. We merken op dat het polynoom s niet eenduidig bepaald is.

Het stelsel A is equivalent met het stelsel

$$\begin{cases} r = 0 \\ q = 0 \\ \dots \\ s = 0 \end{cases}$$

Dit zijn de enige twee vormen van manipulaties die zijn toegestaan. Het idee is dat men beide bewerkingen zo vaak op een stelsel toepast tot er niets meer verandert. In feite moet men zoveel mogelijk koptermen maken en zoveel mogelijk termen door kleinere vervangen. Het verbazingwekkende is dat het uiteindelijke stelsel alleen van de gekozen ordening afhangt en niet van de tussenstappen. Een belangrijke opmerking is dat men niet mag afwijken van het werken met de koptermen. Dit garandeert namelijk dat men niet in een oneindige lus terecht komt!

We bekijken een voorbeeld met twee variabelen x en y . Het voorbeeld is uitgezocht op berekenbaarheid! Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} p_1 = x^2y - 1 = 0 \\ p_2 = xy^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Reduceren levert niets op, dus passen we het uitbreiden toe. Het s -polynoom $s(p_1, p_2) = yp_1 - xp_2 = x - y$ kan verder niet gereduceerd worden, dus het stelsel wordt uitgebreid met de vergelijking $p_3 = x - y = 0$. Het polynoom $s(p_1, p_3) = p_1 - xyp_3 = xy^2 - 1$ reduceert naar 0 en $s(p_2, p_3) = p_2 - y^2p_3 = y^3 - 1$ is irreducibel. Het stelsel gaat over in

$$\begin{cases} p_1 = x^2y - 1 = 0 \\ p_2 = xy^2 - 1 = 0 \\ p_3 = x - y = 0 \\ p_4 = y^3 - 1 \end{cases}$$

Het stelsel uitbreiden gaat niet meer. Reduceren levert uiteindelijk

$$\begin{cases} p_3 = x - y = 0 \\ p_4 = y^3 - 1 \end{cases}$$

Dit stelsel verandert niet meer. Eenvoudig is in te zien dat er drie oplossingen zijn. We merken op dat het eindresultaat afhangt van de gekozen ordening!

4. EIGENSCHAPPEN EN WISKUNDIGE ACHTERGROND

Het stelsel

$$A = \begin{cases} p_1 = 0 \\ \dots \\ p_k = 0 \end{cases}$$

wordt door bovenstaande methode in een eindig aantal stappen getransformeerd in een niet meer te veranderen stelsel

$$B = \begin{cases} q_1 = 0 \\ \dots \\ q_j = 0 \end{cases}$$

De vorm van B zegt iets over het aantal oplossingen. Er geldt:

- * *Het stelsel B bevat een constante kopterm. \Leftrightarrow Het stelsel A heeft geen oplossingen.*
- * *Het stelsel B bevat koptermen met monomen x^k, y^l en z^n . \Leftrightarrow Het stelsel A heeft eindig veel oplossingen.*

De wiskundige achtergrond is als volgt:

De polynomen p_1, \dots, p_k brengen een ideaal

$$I = Id(p_1, \dots, p_k) = \{a_1p_1 + \dots + a_kp_k \mid a_i \in R[x, y, z]\}$$

voort. De polynomen q_1, \dots, q_j van het stelsel B voldoen aan twee eigenschappen

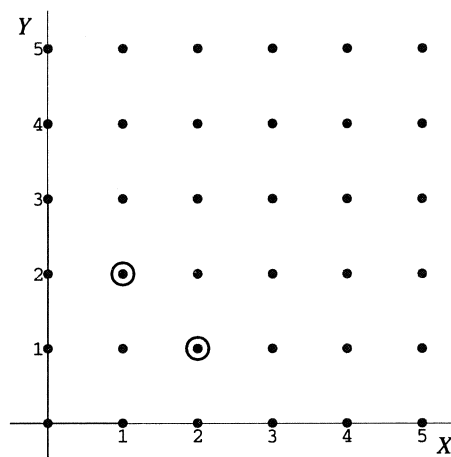
- * $I = Id(q_1, \dots, q_j)$
- * Voor alle f in I is er een q_i zodanig dat kopterm van f deelbaar is door de kopterm van q_i

De polynomen q_1, \dots, q_j vormen een **Gröbnerbasis** van het ideaal I .

We lichten dit nog eens toe met behulp van het voorafgaande voorbeeld. Beschouw het ideaal $I = Id[x^2y - 1, xy^2 - 1] \in R[x, y]$.

Punten in het gearceerde gebied in Figuur 1 corresponderen met koptermen van elementen uit het ideaal I . Bijvoorbeeld, x^2y correspondeert met het omcirkelde punt $(2, 1)$. Bij het omzetten van stelsel polynoomvergelijkingen A in stelsel B gaat men op zoek naar polynomen in het ideaal I met een zo klein mogelijke kopterm.

Uiteindelijk vindt men de polynomen $x - y$ en $y^3 - 1$.



FIGUUR 1

5. VOORBEELDEN

Hieronder staan twee vraagstukken waarvan de oplossing bepaald wordt met de Gröbnerbasistechniek.

- a. Bepaal alle $x \geq 3$ die voldoen aan $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 1$.

De oplossing is dat er geen enkele x is, maar in oudere Mathematicaversies levert de opdracht om dat probleem op te lossen

```
Solve[Sqrt[x] + Sqrt[x - 3] == 1, x]
```

het antwoord

```
{{x -> 4}} .
```

De aanpak van de meeste computeralgebrasystemen is de volgende:

Stel $y = \sqrt{x}$ en $z = \sqrt{x-3}$.

Dit geeft het stelsel polynoomvergelijkingen

$$A = \begin{cases} y + z & -1 = 0 \\ x - y^2 & = 0 \\ x - z^2 & -3 = 0 . \end{cases}$$

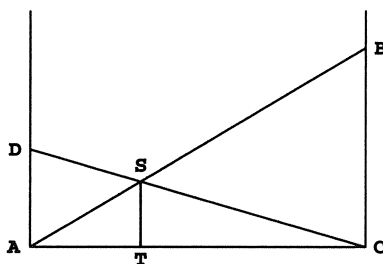
Met behulp van Gröbnerbases gaat dit over in het stelsel

$$B = \begin{cases} x - 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 . \end{cases}$$

Mathematica produceert een fout antwoord omdat de tekens van y en z niet gecontroleerd worden.

VRAAG: Wat is het resultaat (in oudere Mathematicaversies) van de opdracht `Solve[Sqrt[x] + Sqrt[3 - x] == 1, x]` ?

- b. Twee ladders, AB en CD , met lengte 4 respectievelijk 3 meter zijn tussen twee muren geplaatst zoals aangegeven in Figuur 2. De lengte van ST bedraagt 1 meter. Bepaal de afstand tussen de muren, d.w.z. de lengte van AC .



FIGUUR 2

OPLOSSING: Het is in ieder geval duidelijk dat er precies een oplossing is. Stel x is de lengte van AC . Met behulp van eigenschappen van gelijkvormige driehoeken vinden we

$$AT/x = 1/BC \text{ en } TC/x = 1/AD$$

ofwel met

$$BC = \sqrt{16 - x^2} \text{ en } AD = \sqrt{9 - x^2}$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} .$$

De numerieke Mathematica-opdracht

```
TableForm[NSolve[1/Sqrt[9 - x^2] + 1/Sqrt[16-x^2]==1.x]
```

geeft als resultaat acht oplossingen en wel

```
x -> -3.92241 - 0.0721765 I
x -> -3.92241 + 0.0721765 I
x -> -2.90907
x -> -2.60329
x -> 2.60329
x -> 2.90907
x -> 3.92241 - 0.0721765 I
x -> 3.92241 + 0.0721765 I .
```

Het antwoord is als volgt tot stand gekomen.

Met het stellen van $y = \sqrt{9 - x^2}$ en $z = \sqrt{16 - x^2}$ moeten van het stelsel

$$A = \begin{cases} yz - y - z & = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 & = 0 \\ x^2 + z^2 - 16 & = 0 \end{cases}$$

de oplossingen bepaald worden. De Gröbnerbasistechniek zet dit stelsel om in het stelsel

$$B = \begin{cases} z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 14z - 7 & = 0 \\ y - z^3 + z^2 + 8z - 7 & = 0 \\ x^2 + z^2 - 16 & = 0 . \end{cases}$$

Aan de eerste vergelijking van het stelsel B is te zien dat er vier z -waarden gevonden worden. Bij iedere z -waarde horen twee x -waarden.

De waarden $x = \pm 2.60329$ zijn de juiste.

De oplossingen $x = \pm 2.90907$ horen bij $1 = \frac{-1}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ en de complexe oplossingen horen bij $1 = \frac{+1}{\sqrt{16-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

Rekenen met ellebogen

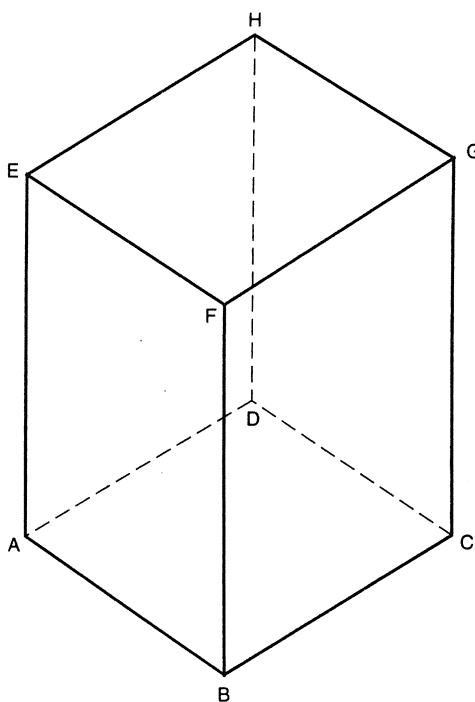
Computeralgebra in dienst van de meetkunde

F. van der Blij

1. DE ELLEBOGEN

1.0. Aanleiding

Op een bestuursvergadering van de stichting Ars et Mathesis bracht prof. J. Verhoeff een samenstel van zes ellebogen (ronde verbindingstukken electriciteitsbuis) mee. Kleine rechte tussenstukjes en een elastiek erdoorheen maakten er een ruimtelijke zeshoek ABCGHE van.



FIGUUR 1

Een stevig object. Maar als goochelaar maakte hij door uitrekken de zeshoek ergens los en zette hem als ABCDHE weer in elkaar. En nu kan de zeshoek een beetje wiebelen!

Natuurlijk ging ik ook zo'n ding maken en eraan rekenen. En inderdaad, met een beetje rekenwerk waren de grenzen van het wiebelen te bepalen. Maar dan wil je meer, hoe gaat het met zeven of met acht ellebogen?

Het leek duidelijk dat vier ellebogen alleen een vierkant kunnen vormen en vijf ellebogen niet passen.

Zeven ellebogen gaf zeven (kwadratische) vergelijkingen met acht onbekenden en het ding in de hand vertoont sierlijke bewegingen.

Acht gaf nog meer vrijheid, maar onoverzichtelijke vormen.

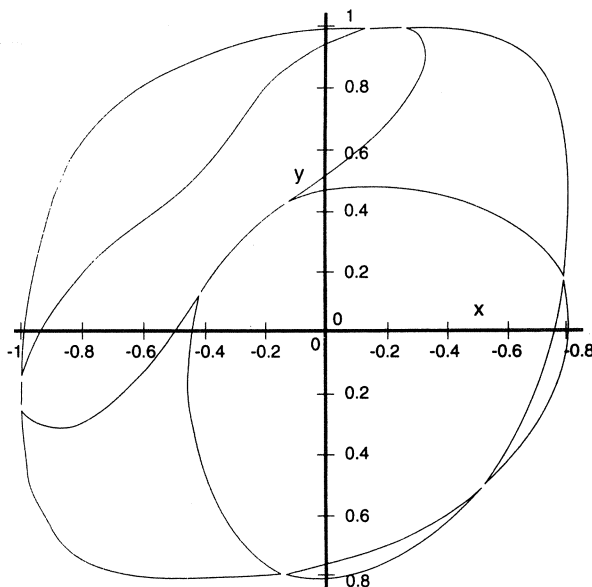
Toch is het allemaal niet triviaal, want rekenen aan zes ellebogen gaf zeven vergelijkingen met zeven onbekenden. Het zou dus niet mogen wiebelen, wiebelen wijst op ten minste één vrijheidsgraad. De vergelijkingen hadden een afhankelijkheid, die je niet direct zag.

Ik moest enige tijd later een voordracht in Nijmegen houden in het kader van recreatieve wiskunde. De ellebogen waren even een voorbeeldje en ik daagde de toehoorders uit de zeven-elleboog door te rekenen.

Kort daarna kreeg ik van prof. A.H.M. Levelt het bericht dat hij dit probleem met computeralgebra had aangepakt. De vergelijkingen was hij met de apparatuur van Gröbner bases, van Macaulay procedures etc. te lijf gegaan.

Eliminatie gaf een vergelijking tussen twee parameters met graad 36 en met 289 termen, dus enkele bladzijden computer uitdraai!

Het hele verslag van de zoektocht heeft Levelt beschreven in [1]. Een iets handiger aanpak gaf tenslotte een grafiek waaruit de bewegingen van de zevenhoek te volgen zijn, met de zevenhoek in de hand. (zie figuur 2)



FIGUUR 2

Op het laatste Nederlandse wiskundecongres in Leiden vermeldde Levelt eveneens het elleboogprobleem. Prof. P.W. Kasteleyn was aanwezig en vertelde dat al lang geleden chemici hadden opgemerkt dat er twee vormen van cyclohexaan bestaan, een koolstofverbinding in de vorm van een ruimtelijke zeshoek. Een starre en een bewegelijke. Alleen zijn bij deze zeshoek de hoeken niet 90 graden

maar $109,47..$ graden ($\arccos -1/3$). Dit is de hoek, die de loodlijnen op de zijden van een regelmatig viervlak met elkaar maken.

Dit geval was, zo vertelde Kasteleyn, door L.J. OOSTERHOFF [2] in zijn dissertatie in 1949 doorgerekend. De berekening van Oosterhoff is elegant en kan gemakkelijk zonder computeralgebra met de hand gedaan worden.

Dus weer wiebelen en een starre vorm. Nieuw rekenwerk, met welke hoeken gaat het?

Had Verhoeff het destijds al niet over 120 graden? Dan heb je natuurlijke als één vorm de gewone vlakke regelmatige zeshoek.

Daarna kreeg ik een moderne P.C. met natuurlijk ook een programma als *DERIVE* er op.

Het oefenen ermee leerde me dat zo'n programma heel veel materiaal voor toepasbare wiskunde bevat. Fourier- en Laplace-transformaties, Bessel-functies enzovoort. Verder natuurlijk differentiëren en primitiveren in een snelheid, die ik nooit zal benaderen.

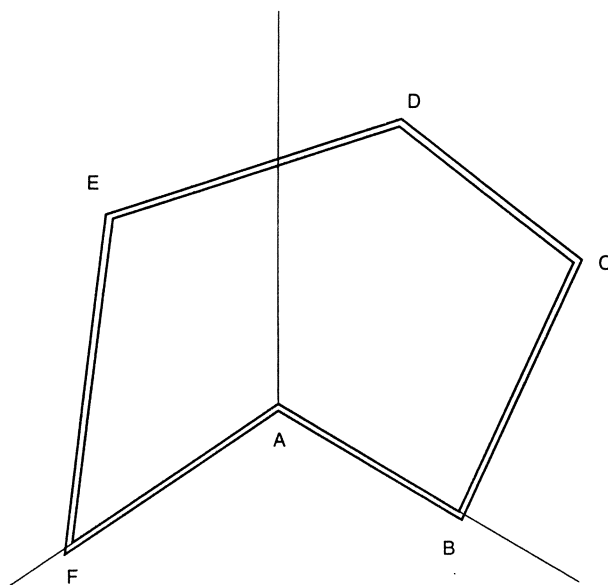
Maar voor mijn problemen was ik al tevreden dat al deze programma's haakjes kunnen uitwerken, optellingen, aftrekkingen en vermenigvuldigingen (van polynomen) voor mij uitvoeren.

Ik kan dat zelf nauwelijks zonder me een keer te verschrijven of te vergissen als het om veeltermen met vele tientallen termen gaat.

En uit de computer experimenten met de zevenhoek was wel duidelijk dat het dus erg riskant was op eigen foutloos rekenwerk te vertrouwen.

1.1. De meest elementaire methode

We werken met een rechthoekig coördinatenstelsel.



FIGUUR 3

$$\begin{aligned}
A &= (0, 0, 0) \\
B &= (1, 0, 0) \\
C &= (1, c, s) \\
D &= (p, q, r) \\
E &= (\bar{c}, 1, \bar{s}) \\
F &= (0, 1, 0)
\end{aligned}$$

waarbij

$$c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha$$

$$\bar{c} = \cos \beta, \quad \bar{s} = \sin \beta$$

Denken we ons het coördinatensysteem vast, dan kunnen we C in de wiebelstand een beetje bewegen en we zien dat E meebeweegt. Bij gegeven α hoort dus wellicht een β . Welke relatie bestaat er tussen α en β en welke waarden kunnen we α geven?

Het rekenwerk is nu triviaal, we gebruiken

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA = 1,$$

$$AC = BD = CE = DF = EA = FB = \sqrt{2}.$$

Omdat $DF = DB$ is $p = q$, dat is al één stap naar de oplossing. We vinden verder de vergelijkingen:

$$(p-1)^2 + (q-c)^2 + (r-s)^2 = 1$$

$$(p-\bar{c})^2 + (q-1)^2 + (r-\bar{s})^2 = 1$$

$$(p-1)^2 + q^2 + r^2 = 2$$

$$p^2 + (q-1)^2 + r^2 = 2$$

$$(\bar{c}-1)^2 + (c-1)^2 + (s-\bar{s})^2 = 2$$

$$c^2 + s^2 = 1, \quad \bar{c}^2 + \bar{s}^2 = 1.$$

Eenvoudig manipuleren levert het stelsel

$$c + \bar{c} + s\bar{s} = 1$$

$$pc + sr = 1$$

$$p\bar{c} + \bar{s}r = 1$$

$$2p^2 + r^2 = 2p + 1.$$

De bovenste vergelijking geeft al meteen de gezochte relatie tussen α en β .

Als

$$c\bar{s} - \bar{c}s \neq 0$$

kunnen we uit de tweede en derde vergelijking p en r berekenen.

Voldoen ze aan de vierde vergelijking?

Hier komt al de keuze tussen handwerk of computer. Natuurlijk moeten $c^2 + s^2 = 1$ en $\bar{c}^2 + \bar{s}^2 = 1$ gebruikt worden.

En inderdaad het klopt!

Om het resultaat beter te overzien maken we een grafiek. We voeren in $\cos \alpha = x$ en $\cos \beta = y$.

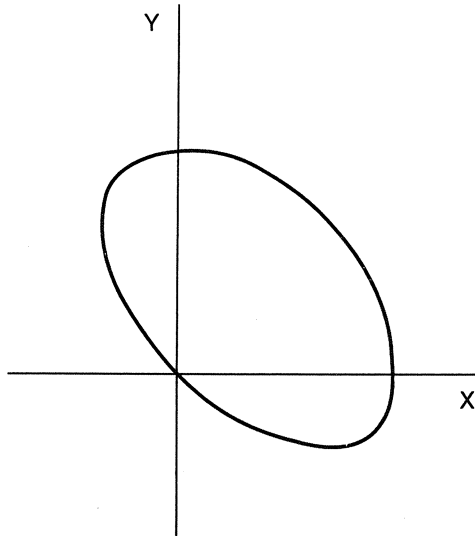
De algebraïsche vergelijking wordt dan

$$x + y \pm \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} = 1$$

oftewel

$$x^2 y^2 - 2(x^2 + xy + y^2) + 2(x + y) = 0.$$

We tekenen in Figuur 4 alleen het deel met $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.



FIGUUR 4

Aardig is ook de grafiek van de relatie tussen α en β te tekenen, deze geeft een beter beeld van de mogelijke bewegingen. Het geval $c\bar{s} - \bar{c}s = 0$ geeft $\sin(\alpha - \beta) = 0$; dus $\alpha = \beta$ of $\alpha - \beta = \pm\pi$. Dit invullen in de eerste vergelijking geeft alleen de mogelijkheden

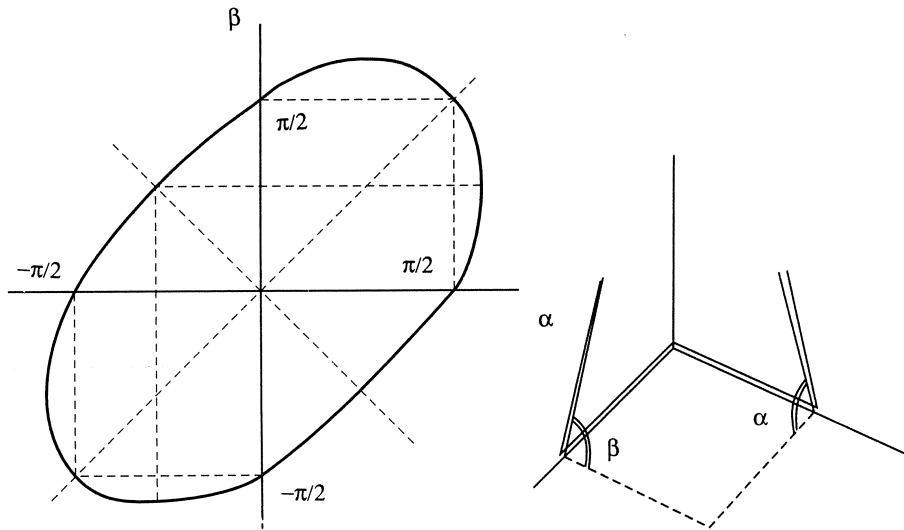
$$\alpha = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad \beta = \pm \frac{1}{2}\pi$$

en $p = 1$ of $p = 0$.

Het eerste is het starre geval, de tweede mogelijkheid is bevat in de gesloten baan.

1.2. Een iets andere berekening

Een bezwaar van het rekenmodel van de vorige paragraaf is dat we niet zonder



FIGUUR 5

meer direct kunnen generaliseren naar een ellebogenveelhoek met hoeken, die een andere waarde als 90 graden hebben. Lineaire algebra werkt beter.

Noemen we de vectoren, die de zijden van de zeshoek vormen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.$$

Dan geldt, wanneer we de lengten van de zijden op 1 stellen

$$(x_i, x_i) = 1; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$(x_i, x_{i+1}) = 0; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$(x_6, x_1) = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

Nu hebben we weliswaar 18 onbekenden met 15 vergelijkingen, maar we leggen de plaats van onze zeshoek in de ruimte nog niet vast; daardoor lijken we meer vrijheid te hebben dan echt aanwezig is. Het is nu eenvoudig zeshoeken met een andere hoek te bestuderen. We gebruiken nu het stelsel

$$(x_i, x_i) = 1 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$(x_i, x_{i+1}) = c \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$(x_6, x_1) = c$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

Maar het is de vraag wat nu beter is, computeralgebra of eerst nog wat denken en met de hand rekenen alvorens de machine in te schakelen. het verslag van Levelt zou ons moeten waarschuwen te snel de computer in te schakelen.

Oosterhoff gebruikte deze aanpak voor het geval van de koolstofbindingen. Hij bracht op een vernuftige manier wat symmetrie aan en reduceerde het rekenwerk tot eenvoudig met de hand uitvoerbare omvang.

In de volgende paragraaf gebruiken we een variant van deze methode.

1.3. Een derde rekenwijze

Eigenlijk zijn de methoden, die we in 1.1 en 1.2 gebruiken niet zo fraai. Het aanbrengen van een coördinatenstelsel verstoort de symmetrie, die in het probleem van nature aanwezig is.

Wanneer we de ruimtelijke zeshoek op zichzelf bezien kunnen we werken met de zes ribben, die alle gelijke lengte hebben, met de zes "korte" diagonalen, die eveneens alle de zelfde lengte hebben en de drie "lange" diagonalen, die verschillende lengten mogen hebben. Bij de rechthoekige zeshoek zijn in het starre geval de drie lange diagonalen gelijk, in het wiebelige geval behoeven ze niet gelijk te zijn.

We stellen nu voor de zeshoek ABCDEF:

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA = k,$$

$$AC = BD = CE = DF = EA = FB = l,$$

$$AD = u, \quad BE = v, \quad CF = w.$$

Tussen u , v en w moeten algebraïsche relaties bestaan.

In wezen zoeken we naar een ruimtelijke generalisatie van de relatie die tussen de vier zijden (a, b, c en d) en de twee diagonalen (e en f) van een vlakke vierhoek bestaat.

Deze laatste is welbekend, en eenvoudig te herinneren als de formule die het volume van een viervlak met ribben a, b, c, d, e, f geeft. Door deze formule 0 te stellen vinden we de relatie tussen de zijden en de diagonalen van een willekeurige vierhoek, de vierhoek is immers een plat geworden viervlak!

We vinden de formule in de vorm van een determinant en gelukkig heeft ons computer programma de optie om determinanten van matrices te berekenen; een groot voordeel.

Maar onze ruimtelijke zeshoek is wel iets gecompliceerder dan de vlakke vierhoek.

Laten we eerst eens een vijfhoek ABCDE bezien. dit zijn vijf punten in de driedimensionale ruimte. We kunnen deze figuur opvatten als een "platgeslagen" simplex in de vierdimensionale ruimte.

De formule voor het "volume" van een vierdimensionaal simplex is een directe generalisatie van het driedimensionale geval.

Omdat de lengten in dit soort formules altijd in het kwadraat voorkomen, en we ook formules voor het kwadraat van de volumina vinden, kiezen we een handige notatie om onze matrices in de computer in te voeren.

(Voor ingewijden: al deze kwadraten ontstaan in de formules omdat lengten met Pythagoras als wortels uit kwadraten gedefinieerd worden, men kan ook zeggen dat lengten, inhouden etc. door de oriëntatie van de ruimte zowel positief als negatief gerekend moeten worden)

We beginnen met de oppervlakte van een driehoek; de zijden die de hoekpunten 1, 2 en 3 verbinden geven we de lengten

$$\sqrt{a_{12}}, \quad \sqrt{a_{13}}, \quad \sqrt{a_{23}}.$$

Dan wordt het kwadraat van de oppervlakte van de driehoek gegeven door

$$-\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{12} & 0 & a_{23} \\ 1 & a_{13} & a_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

(Aardig om dit even uit te werken en te zien dat de gewone s -formule voor de oppervlakte te doorschijn komt)

Analoog is het kwadraat van de inhoud van een viervlak met hoekpunten 1,2,3 en 4: (we geven de lengten van de ribben, die de hoekpunten i en j verbindt aan met $\sqrt{a_{ij}}$)

$$\frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 1 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ 1 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

En voor het volume van een vierdimensionaal simplex met vijf hoekpunten 1,2,3,4 en 5 wordt het kwadraat van het "volume"

$$-\frac{1}{6816} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 1 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 1 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 1 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & a_{45} \\ 1 & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{vmatrix}.$$

We keren terug naar onze ruimtelijke zeshoek ABCDEF.

De vijf hoekpunten ABCDE moeten in een driedimensionale ruimte liggen. De formule voor het vierdimensionale "volume" op deze vijf punten moeten we dus 0 stellen om de relatie tussen de zijden en de diagonalen te vinden.

We schrijven nu:

$$a = k^2, \quad b = l^2, \quad x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = w^2.$$

In ons speciaal geval vinden we de relatie:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b & x & b \\ 1 & a & 0 & a & b & y \\ 1 & b & a & 0 & a & b \\ 1 & x & b & a & 0 & a \\ 1 & b & y & b & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Noemen we deze determinant

$$-F(x, y, a, b)$$

en berekenen we met de computer:

$$\begin{aligned} F(x, y, a, b) &= x^2y^2 - 2(a+b)xy(x+y) + \\ &+ (a-b)^2(x^2+y^2) + 4(a^2+ab+b^2)xy - 2(a-b)^3(x+y) + \\ &+ (a-b)^2(a+b)(a-7b). \end{aligned}$$

We vinden dus als voorwaarde:

$$F(x, y, a, b) = 0.$$

Nu kunnen we de symmetrie gebruiken, wanneer we nu in BCDEF en CDEFA rekenen vinden we de relaties

$$F(y, z, a, b) = 0$$

en

$$F(z, x, a, b) = 0.$$

We hebben nu drie vergelijkingen met drie onbekenden x, y en z .

We vermoeden dat er toch oneindig veel oplossingen zijn. Er moet dus wel een afhankelijkheid zijn, maar liefst willen we in onze verdere berekeningen de symmetrie zo goed mogelijk gebruiken.

Terloops merken we nog op dat er natuurlijk voor de waarden van a, b, y en z grenzen zijn gesteld. Zo moet

$$0 \leq b \leq 4a$$

en x, y en z moeten liggen tussen

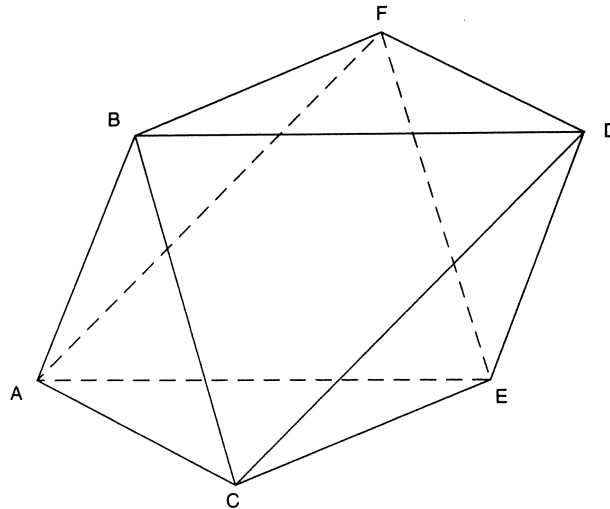
$$\frac{(b-a)^2}{a} \text{ en } a+2b.$$

De gelijktekens komen voor in de gevallen dat de dimensie verlaagd wordt.

We gaan nu verschillende gevallen onderscheiden.

Als de drie diagonalen gelijk zijn moeten ze voldoen aan:

$$F(x, x, a, b) = 0$$



FIGUUR 6

oftewel aan

$$x^4 - 4x^3(a + b) + 6x^2(a^2 + b^2) - 4x(a - b)^3 + (a - b)^2(a + b)(a - 7b) = 0$$

Ons computerprogramma ontbindt deze veelterm voor ons en geeft de wortels:

$$x_1 = a + b$$

$$x_2 = a - b$$

$$x_3 = (a + 2b) - \sqrt{12ab - 3b^2}$$

$$x_4 = (a + 2b) + \sqrt{12ab - 3b^2}$$

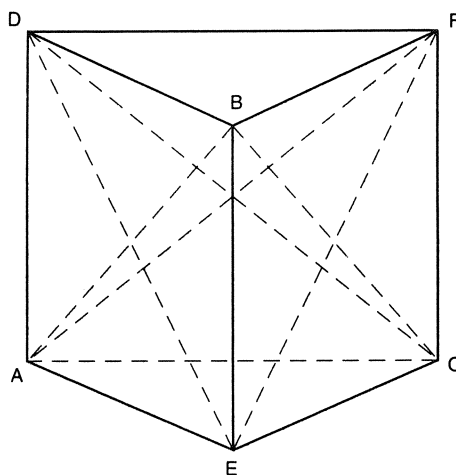
In het geval van de eerste wortel moet $b \leq 3a$; voor de tweede wortel moet $b \leq a$.

De laatste kan niet optreden omdat dan niet aan de boven genoemde voorwaarde voor x is voldaan.

De eerste is direct te realiseren in een regelmatige drizijdige prismoïde, zie Figuur 6. De tweede is te realiseren in een regelmatig prisma, zie Figuur 7. Vervolgens beschouwen we het geval dat twee diagonalen x gelijk zijn en de derde verschillend van x is. We moeten x en y oplossen uit

$$F(x, x, a, b) = 0$$

$$F(x, y, a, b) = 0.$$



FIGUUR 7

Nu is

$$G(x, y, a, b) = \frac{F(x, x, a, b) - F(x, y, a, b)}{x - y}$$

een polynoom in y van de eerste graad en we kunnen (natuurlijk met de computer) de y expliciet in x , a en b uit drukken.

Voor x hadden we drie mogelijke waarden, deze substitueren we (waar zouden we zijn zonder computer?) en vinden:

$$x = a + b \rightarrow y = \frac{(a - b)^2}{a}$$

$$x = a - b \rightarrow y = a + 2b$$

$$x = a + 2b - \sqrt{12ab - 3b^2} \rightarrow y = \frac{1}{2}\{(2a + b) + \sqrt{12ab - 3b^2}\}.$$

Het is een fraaie en nuttige meetkundige oefening door constructies te onderzoeken welke mogelijkheden in de werkelijke wereld gerealiseerd kunnen worden. Want door de sterke algebraïsering zijn allerlei mogelijkheden ingevoerd die alleen met complexe getallen gerealiseerd kunnen worden.

Nu bestuderen we het geval dat alle drie de "lange" diagonalen verschillende lengten hebben. We hebben dus de vergelijkingen:

$$F(x, y, a, b) = 0$$

$$F(y, z, a, b) = 0$$

$$F(z, x, a, b) = 0.$$

We voeren nu in

$$A(x, y, z) = F(x, y, a, b) + F(y, z, a, b) + F(z, x, a, b).$$

Nu is A een symmetrische functie van de drie variabelen x , y en z . Voeren we de elementair symmetrische functies:

$$s = x + y + z$$

$$t = xy + yz + zx$$

$$p = xyz$$

in, dan is A te schrijven als een functie van s , t en p . We vinden:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(s, t, p) = & t^2 - 2ps - 2(st - 3p)(a + b) + 2s^2(a - b)^2 + \\ & + 12tab - 4s(a - b)^3 + 3(a + b)(a - b)^2(a - 7b). \end{aligned}$$

Definieren we nu

$$G(x, y, z) = \frac{F(x, y, a, b) - F(y, z, a, b)}{x - z}$$

dan geldt:

$$\begin{aligned} G(x, y, z) = & (x + z)y^2 - 2(a + b)y(x + y + z) + \\ & + (a - b)^2(x + z) + 4(a^2 + ab + b^2)y - 2(a - b)^3. \end{aligned}$$

We definiëren nog

$$B(x, y, z) = G(x, y, z) + G(y, z, x) + G(z, x, y)$$

dan is B een symmetrische functie van x , y en z ; B is te schrijven als

$$\tilde{B}(s, t, p) = st - 3p - 2(a + b)s^2 + 6(a^2 + b^2)s - 6(a - b)^3.$$

Tenslotte definiëren we:

$$C(x, y, z) = \frac{G(x, y, z) - G(y, x, z)}{y - x}$$

met

$$C(x, y, z) = (xy + xz + yz) - 2(a + b)(x + y + z) + 3(a + b)^2$$

en

$$\tilde{C}(s, t, p) = t - 2(a + b)s + 3(a + b)^2.$$

Samenvattend vinden we dat de oplossingen van

$$F(x, y, a, b) = F(y, z, a, b) = F(z, x, a, b) = 0$$

voldoen aan de betrekkingen:

$$t = 2(a+b)s - 3(a+b)^2$$

$$p = (a-b)^2 s - 2(a-b)^3$$

Nu blijken deze waarden voor t en p ingevuld in \tilde{A} , \tilde{B} en \tilde{C} voor alle waarden van s identiek te voldoen.

Onze conclusie is wanneer we x, y en z kiezen als de drie wortels van de kubische vergelijking:

$$X^3 - sX^2 + (2(a+b)s - 3(a+b)^2)X - ((a-b)^2s - 2(a-b)^3) = 0$$

we voor alle geschikte waarden van s drie lengten hebben, die passen als “lange” diagonalen in de ruimtelijke zeshoek met zijden $k = \sqrt{a}$ en korte diagonalen $l = \sqrt{b}$. Er blijft nog de vraag voor welke waarden van s we waarden voor de lengten van de diagonalen verkrijgen, die aanleiding geven tot reële ruimtelijke zeshoeken.

Aardig is om (natuurlijk met behulp van computerrekenwerk) de lengte van één van de “lange” diagonalen vast te leggen en de daarbij passende s te bepalen en daarna de lengten van de beide andere “lange” diagonalen te berekenen.

Wanneer we de methode van Oosterhoff beter hadden bestudeerd waren we een klein beetje anders te werk gegaan.

In plaats van als variabelen de kwadraten van de lengten van de “lange” diagonalen te kiezen hadden we andere variabelen gekozen, namelijk \bar{x} , \bar{y} en \bar{z} , gedefinieerd door:

$$x = a + b + 2\bar{x}\sqrt{ab}$$

$$y = a + b + 2\bar{y}\sqrt{ab}$$

$$z = a + b + 2\bar{z}\sqrt{ab}$$

De formule, die de betrekking tussen x en y geeft:

$$F(x, y, a, b) = 0$$

wordt in de nieuwe variabelen:

$$\bar{x}^2\bar{y}^2 - (\bar{x}^2 + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2) + d(\bar{x} + \bar{y}) = 0$$

met

$$d = \frac{(b-3a)\sqrt{b}}{2a\sqrt{a}}.$$

We zien dat \bar{x} en \bar{y} opgevat kunnen worden als consinussen van hoeken, dus voeren we in:

$$\bar{x} = \cos \alpha, \quad \bar{y} = \cos \beta$$

De relatie tussen deze hoeken wordt:

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta = 1 + \cos \alpha \cos \beta - d \cdot (\cos \alpha + \cos \beta).$$

In het geval dat \bar{x} , \bar{y} en \bar{z} verschillend zijn vinden we door eliminatie op precies dezelfde manier als boven:

$$\bar{x}^2(\bar{y} + \bar{z}) - (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) + d = 0$$

en

$$\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} = 0$$

en

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} = d - (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}).$$

We vinden dat \bar{x} , \bar{y} en \bar{z} de wortels zijn van de derdegraadsvergelijking

$$X^3 - \lambda X^2 + (\lambda - d) = 0$$

We merken nog op dat het de moeite loont van de relatie tussen \bar{x} en \bar{y} :

$$\bar{x}^2\bar{y}^2 - (\bar{x}^2 + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2) + d(\bar{x} + \bar{y}) = 0$$

een grafiek te maken.

Wanneer \bar{x} en \bar{y} namelijk bepaald zijn is \bar{z} door het oplossen van een eerste graadsvergelijking eenduidig te vinden.

De grafiek van het verband tussen \bar{x} en \bar{y} is het analogon van Figuur 4 uit paragraaf 1.1.

De verschillende keuzen voor d hangen samen met de keuze van de hoek van de zeshoek.

1.4. De zevenhoek

We kunnen drie methoden, die we voor de zeshoek gebruiken generaliseren voor de zevenhoek. Hierbij werkt de eerste methode natuurlijk alleen voor zevenhoeken met rechte hoeken. We volstaan met een korte schets.

We bestuderen met de eerste methode de zevenhoek ABCDEFG met

$$A = (0, 0, 0)$$

$$B = (1, 0, 0)$$

$$C = (1, c, s) \quad c = \cos \alpha \text{ en } s = \sin \alpha$$

$$D = (p, q, r)$$

$$E = (\bar{q}, \bar{p}, \bar{r})$$

$$F = (\bar{c}, 1, \bar{s}) \quad \bar{c} = \cos \beta \text{ en } \bar{s} = \sin \beta$$

$$G = (0, 1, 0)$$

Door deze ogenschijnlijk wat bizarre naamgeving kunnen we toch nog enige symmetrie gebruiken en het rekenwerk bekorten.

De vergelijkingen zijn nu

$$AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA = 1$$

$$AC = BD = CE = DF = EG = FA = GB = \sqrt{2}.$$

We hebben in eerste instantie tien onbekenden ($p, q, r, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, c, s, \bar{c}, \bar{s}$) en vinden negen vergelijkingen:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 + 2p \quad (1)$$

$$qc + rs = 1 \quad (2)$$

$$2(\bar{c} - 1)p + 2q + 2\bar{s}r = 1 \quad (3)$$

$$c^2 + s^2 = 1 \quad (4)$$

en de vier vergelijkingen, die hieruit volgen door boven de onbekende p, q, r, c, s streepjes te zetten of weg te laten.

De negende vergelijking is

$$2p\bar{q} + 2\bar{p}q + 2r\bar{r} = 1 + 2p + 2\bar{p}. \quad (5)$$

We kunnen eerst uit de vergelijkingen (2) en (3) p en q lineair oplossen en na substitutie in (1) een vierkantsvergelijking in r vinden, dus twee oplossingen.

We vinden twee stel oplossingen (p, q, r). Analoog vinden we twee stel oplossingen ($\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$).

Vullen we deze in (5) in dan vinden we een betrekking tussen de goniometrische functies van α en β .

Misschien is het wel verstandig eerst nog wat te denken voor we dit rekenwerk aan de computer toevertrouwen.

De tweede methode geeft veel rekenwerk, maar is de moeite van het proberen waard.

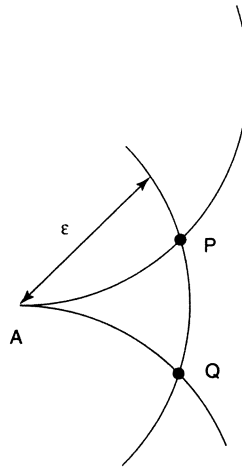
De derde methode, die we de intrinsieke zouden kunnen noemen, werkt in dit geval met zeven "lange" diagonalen, $AD, BE, CF, DG, EA, FB, GC$.

We bekijken nu eerst weer de vijfhoek ABCDE. Als $AB = \sqrt{a}$ en $AC = \sqrt{b}$ vinden we als voorwaarde, geheel gelijk aan het resultaat bij de zeshoek:

$$H(AC^2, BD^2, a, b, EA^2) = 0$$

Hierbij is:

$$\begin{aligned} H(x, y, a, b, z) = & x^2y^2 - 2(a+b)xy(x+y) + (a-b)^2(x^2+y^2) + \\ & + (4a^2 + 6b^2)xy - (2a^3 - 10a^2b + 8ab^2)(x+y) + \\ & + (4a - 2b)xyz - (4a^2 - 2ab - 2b^2)(x+y)z - (4ab - b^2)z^2 + \\ & + 2(2a^3 - a^2b + 6ab^2 - 4b^3)z + (a^4 - 12a^3b + 8a^2b^2). \end{aligned}$$



FIGUUR 8

Cyclisch verwisselen van de letters ABCDEFG geeft nu in het totaal zeven vergelijkingen in de zeven onbekende “lange” diagonalen. We hebben weer een zeer symmetrisch patroon en verwachten een zevende-graadsvergelijking te vinden met een vrije parameter. Het loont natuurlijk weer de moeite om nieuwe variabelen (de hoeken tussen “korte” en “lange” diagonalen) in te voeren:

$$AD^2 = a + b + 2x\sqrt{ab} \text{ etc.}$$

Alle vergelijkingen zijn van de vierde graad, maar onder aanname van het verschillend zijn van de lengten van de “lange” diagonalen is de graad te reduceren.

Het lijkt aardig dit probleem met computeralgebra aan te pakken, daarbij optimaal van de symmetrie gebruik makend.

Uit algemene theorieën volgt dat geen zevenhoek met allemaal gelijke “lange” diagonalen bestaat.

2. DE DRIE BISSECTRICES

2.1. De vraagstelling

De hoek tussen twee rakende cirkelbogen is volgens de gangbare definities de hoek tussen de raaklijnen aan de cirkelbogen en dus gelijk aan nul. Maar soms definieert men de hoek als de ruimte tussen de benen van de hoek en die is wel heel duidelijk niet niks.

In dat kader kan een andere dan de klassieke hoekmaat gedefinieerd worden. Reeds Euclides spreekt over de hoek tussen twee cirkelbogen als verschillend van de hoek tussen de raaklijnen. Laten twee cirkelbogen elkaar raken in punt A . We kunnen met A als middelpunt en ϵ als straal een cirkel tekenen, die als ϵ voldoende klein is beide cirkelbogen snijdt. De lengte van de boog PQ hangt van ϵ af en deze functie willen we als maat voor de hoek tussen de cirkelbogen gebruiken. Overigens is deze definitie bruikbaar voor de hoek tussen twee

elkaar rakende of snijdende krommen. (zie voor verdere uitwerking [3] en een in voorbereiding vervolgartikel van dezelfde auteurs).

Als de raking zo is dat de middelpunten van de cirkels aan verschillende kanten van de raaklijn liggen vinden we na een elementaire berekening:

$$\text{boog } PQ = \arcsin \frac{\epsilon}{2R_1} + \arcsin \frac{\epsilon}{2R_2}.$$

Het ligt nu voor de hand ook de bissectrice van van de hoek bij A tussen de twee cirkelbogen te definiëren. We beschouwen daartoe het punt M op de boog PQ zodat boog $PM = \text{boog } MQ$ en M binnen de hoek ligt. De verzameling van de punten M bij variabele ϵ vormt een kromme binnen de hoek.

Allereerst onderwerpen we deze kromme aan een nader onderzoek. We gebruiken analytische methoden en kiezen A als oorsprong van een coördinatenstelsel en de gemeenschappelijke raaklijn als X -as. De vergelijkingen van de twee cirkels zijn dan

$$x^2 + y^2 - 2yR_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2yR_2 = 0$$

of stukjes boog in poolcoördinaten:

$$r = 2R_1 \sin \phi \quad (0 \leq \phi \leq \phi_0)$$

$$r = -2R_2 \sin \phi \quad (\phi_1 \leq \phi \leq 0)$$

Iets omgeschreven

$$\phi = \arcsin \frac{r}{2R_1}; \quad \phi = \arcsin \frac{r}{2R_2}.$$

De vergelijking van de bissectrice is hier direct uit af te leiden:

$$\phi = \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{r}{2R_1} - \arcsin \frac{r}{2R_2} \right].$$

Het ligt voor de hand deze impliciete vergelijking in poolcoördinaten wat om te vormen.

$$\cos \left\{ \arcsin \frac{r}{2R_1} - \arcsin \frac{r}{2R_2} \right\} = \cos 2\phi$$

en na wat verder omwerken

$$r^2 = \frac{4R_1^2 R_2^2 \sin^2 2\phi}{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos 2\phi}.$$

In rechthoekige coördinaten vinden we

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{16R_1^2 R_2^2 x^2 y^2}{(R_1 - R_2)^2 x^2 + (R_1 + R_2)^2 y^2}.$$

Maar met al het gedachteloos manipuleren met de formules, kwadrateren, herleidingen als $\sin(\arcsin x) = x$ hebben we wel wat extra stukken ingevoerd.

Een aardige oefening voor de belangstellende lezer is om een redelijke verklaring voor alle parasitaire stukken te vinden. Men denke er aan dat in de gewone euclidische meetkunde eigenlijk ook sprake is van twee bissectrices (binnen en buiten) die algebraïsch niet zo goed te scheiden zijn.

In een langdurige dialoog kwamen de heer Van Asch en de auteur tot het vermoeden dat, respectievelijk de vraag of de drie bissectrices van een driehoek gevormd door rakende cirkelbogen door een punt zouden gaan.

In de klassieke geval hebben de drie bissectrices zelfs vier punten gemeen, de middelpunten van in- en aan-geschreven cirkels van de driehoek, hoe is dat in het geval van de driehoek van drie rakende cirkelbogen?

Een eerste poging is natuurlijk om computer graphics te gebruiken en maar te kijken. Laat de drie bissectrices tekenen en kijk.

Maar ja als denkt dat ze wel door één of meer punten gaan weet je natuurlijk nog niets, misschien lijkt het alleen maar zo, of hangt het van de bijzondere keuze van de stralen af. En als ze duidelijk niet door een punt gaan; welnu het zijn, algebraïsche krommen van de graad zes, wellicht hebben ze juist twee of meer complexe punten gemeen.

Er zal dus gerekend moeten worden. Het zal, zelfs met computeralgebra, niet meevallen. Laten we daarom met enkele speciale gevallen beginnen.

2.2. De bissectrice van een hoek tussen congruente cirkelbogen

In Figuur 9 tekenden we twee elkaar rakende gelijke cirkelbogen, dus $R_1 = R_2 = R$.

De formule voor de bissectrice wordt nu eenvoudiger. We vinden:

$$y^2((x^2 + y^2)^2 - 4x^2R^2) = 0.$$

Dus de dubbel getelde raaklijn en twee parasitaire cirkels. In Figuur 9 geven we een stukje verklaring van deze parasitaire bogen, de hoek tussen de bogen AB en AC wordt door AD en AE middendoor gedeeld.

In Figuur 10 tekenen we een driehoek van drie elkaar rakende bogen van cirkels met gelijke stralen.

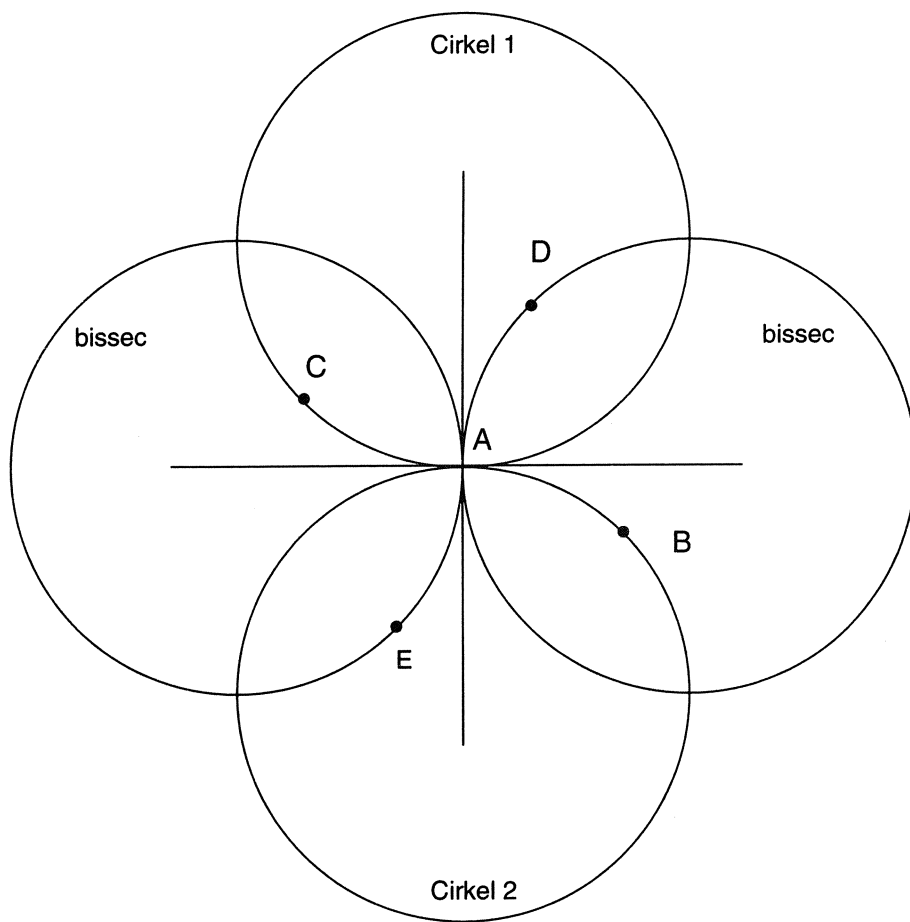
De drie bissectrices bestaan in dit geval uit drie sets bestaande ieder uit een (dubbel getelde) rechte lijn en een tweetal cirkels. Elementaire meetkunde leert dat er in dit geval inderdaad vier gemeenschappelijke punten van de bissectrices zijn.

Vervolgens beschouwen we de hoek tussen een cirkel en de raaklijn in het punt A van de cirkel. De vergelijking (één van de stralen is oneindig geworden) reduceert zich nu tot

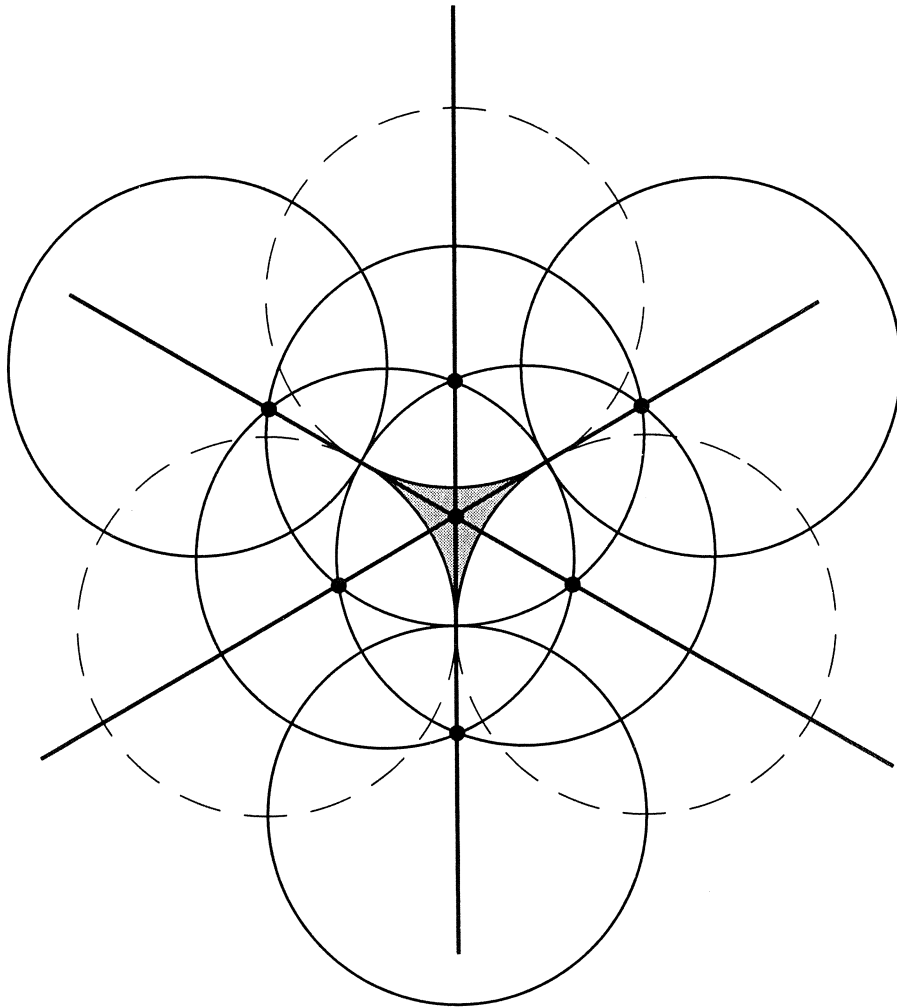
$$(x^2 + y^2)^3 - 16R^2x^2y^2 = 0.$$

In poolcoördinaten wordt het heel fraai:

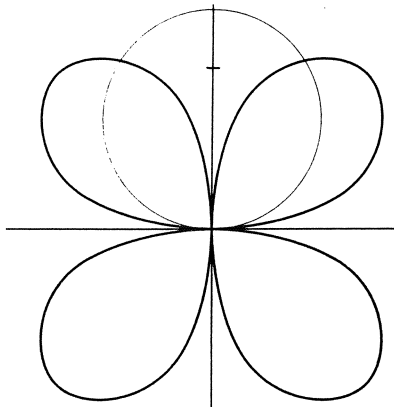
$$r = \pm 2R \sin 2\phi$$



FIGUUR 9



FIGUUR 10



FIGUUR 11

de vergelijking van het vierbladig rozet, een klassieke tekenopgave bij de introductie van poolcoördinaten. We bestuderen nu het geval van een driehoek gevormd tussen twee rakende cirkels met gelijke straal en een gemeenschappelijke raaklijn aan beide cirkels. Omdat de gemeenschappelijke raaklijn in het punt C in de figuur een symmetrieas van de figuur is lijkt de concurrentie van de bissectrices ook in dit speciale geval verzekerd.

Maar het is duidelijk dat we voor een algemenere situatie zullen moeten gaan rekenen.

2.3. Berekeningen

We noemen de drie stralen van de drie cirkels nu a , b en c . De cirkels met stralen a en b raken elkaar in het punt C , met stralen a en c in B en met stralen b en c in A .

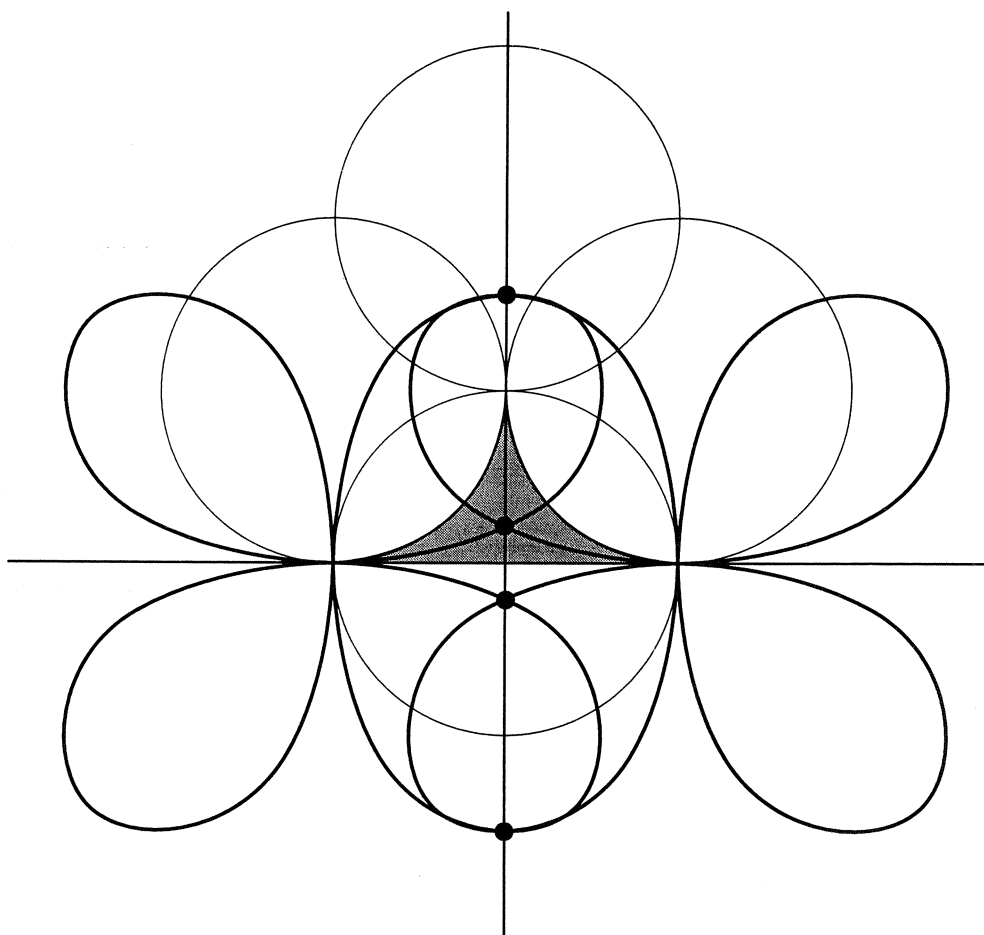
We vonden boven de vergelijking van de bissectrice in een coördinaten stelsel dat de oorsprong in het hoekpunt van de hoek had.

We zullen nu moeten proberen een goede plaats voor de oorsprong van het coördinaten stelsel te vinden. Het snijpunt van de drie gemeenschappelijke raaklijnen aan de cirkels (het machtspunt van de cirkels) is het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van de driehoek ABC . Er ligt niet een speciale keuze voor de richting van de x -as voor de hand. We kiezen maar een willekeurige lijn door de nieuwe oorsprong.

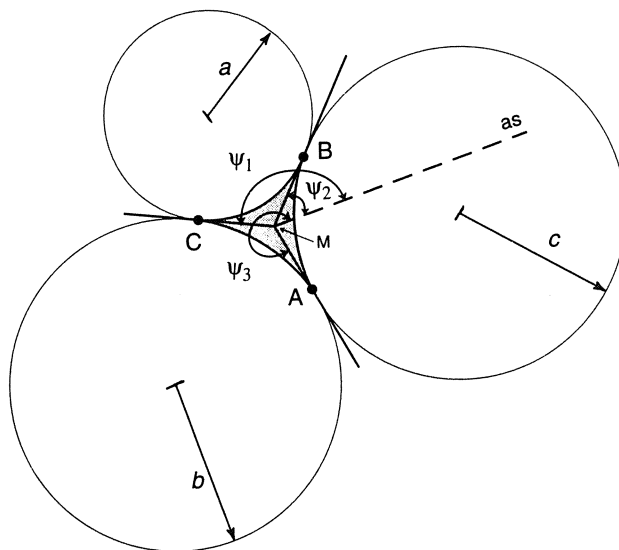
Met een directe klassieke coördinatentransformatie vinden we voor de vergelijking van de bissectrice van de hoek die gevormd wordt door de rakende cirkels met straal a en b :

$$F(x, y, \bar{c}, \bar{s}, a, b, t) = 0$$

waarin



FIGUUR 12



FIGUUR 13

$$F(x, y, c, s, a, b, t) = \\ [x^2 + y^2 + t^2 - 2t(cx + sy)]^2 \cdot [(a - b)^2(t - cx - sy)^2 \\ + (a + b)^2(sx - cy)^2] - 16a^2b^2[t - cx - sy]^2 \cdot [sx - cy]^2$$

en

$$t = \sqrt{\frac{abc}{a + b + c}}$$

$$\bar{c} = c_3 = \cos(\psi_3) \quad \bar{s} = s_3 = \sin(\psi_3),$$

waarbij ψ_3 de hoek is die CM met de gekozen as maakt. Door onze algemene opzet vinden we nu direct de vergelijkingen van de twee andere bissectrices:

$$F(x, y, c_1, s_1, b, c, t) = 0$$

$$F(x, y, c_2, s_2, c, a, t) = 0$$

waarbij s_1, s_2, c_1 and c_2 analoog aan c en s gedefinieerd zijn, nu met hoeken ψ_1 en ψ_2 , die de lijnen BM en AM met de as maken. Tussen de hoeken ψ_1, ψ_2 en ψ_3 bestaan eenvoudige relaties:

$$\psi_1 - \psi_2 = 2\alpha; \quad \psi_3 - \psi_1 = 2\pi - 2\gamma \quad (*)$$

waarbij de hoeken α en β bekend zijn:

$$\cos \alpha = \frac{bc - a(a + b + c)}{a^2 + (ab + ac + bc)}; \quad \cos \gamma = \frac{ab - c(a + b + c)}{c^2 + (ab + ac + bc)}.$$

De vraag is nu of de drie algebraïsche vergelijkingen:

$$F(x, y, c_3, s_3, a, b, t) = 0$$

$$F(x, y, c_1, s_1, b, c, t) = 0$$

$$F(x, y, c_2, s_2, c, a, t) = 0$$

in de twee onbekenden x en y een gemeenschappelijke oplossing hebben. De afhankelijkheid van ψ_1, ψ_2 en ψ_3 moet door gebruik te maken van de relaties (*) verdwijnen.

Een aardig kluitje voor computeralgebra. Als amateur op eenvoudige apparatuur lukte het mij niet, er waren te veel parameters en/of de graden waren te hoog. Maar in beginsel moet het wel kunnen. Misschien gaat een echte vakman nog wel eens aan het werk om met meer geavanceerde apparatuur dit probleem aan te pakken, maar wellicht is het ook verstandiger eerst nog maar eens goed te denken of het probleem niet eenvoudiger geformuleerd kan worden. Maar computer algebra zal er wel bij nodig blijven!

3. VERDER ONDERZOEK

3.1. Achtergronden

Waarschuwing: In het volgende worden geen oefenopgaven gegeven, van vele te vermelden problemen heb ik geen idee of ze al dan niet met computeralgebra oplosbaar zijn. Sommigen zijn ook slordig of onduidelijk geformuleerd.

De collectie is allesbehalve systematisch of compleet opgesteld. Ieder goed (ouderwets) meetkundeboek geeft inspiratie tot nog veel meer en beter.

Bij gegeven lijnstukken met lengten a, b en c behoort, onder zekere voorwaarden een driehoek.

Aan deze driehoek worden verschillende grootheden toegevoegd, zoals omtrek, oppervlakte, stralen om- en ingeschreven cirkels enzovoort.

Deze grootheden hangen symmetrisch van a, b en c af. In sommige gevallen rationaal, in andere met worteltekens, om rationale uitdrukkingen te krijgen moet dan op passende wijze gekwadeerd worden. We wezen daar al eerder op.

De bovengenoemde voorbeelden zijn overbekend uit de elementaire meetkunde:

$$\text{omtrek} = 2s = a + b + c$$

$$(\text{oppervlakte})^2 = O^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

$$\text{straal omcirkel} = R = abc/4O$$

$$\text{straal incirkel} = r = O/s$$

De laatste drie zijn eenvoudig in a, b en c uit te drukken. Natuurlijk komen er worteltekens voor. Wanneer we strikt algebraïsch met de ingeschreven cirkel werken zullen we vermoedelijk de aangeschreven cirkels en hun stralen r_a, r_b en r_c vanzelf meekrijgen.

Allerlei andere grootheden, die symmetrisch van a, b en c afhangen moeten we uit kunnen drukken (als ze tenminste rationaal zijn) in de elementair symmetrische functies $a + b + c, ab + bc + ca, abc$.

Het is een opgave om relaties tussen dit soort grootheden op te sporen, zowel gelijkheden als ongelijkheden.

Het lijkt nuttig computeralgebra te hulp te roepen als men dit soort beschouwingen naar de sterometrie wil generaliseren, om over hoger dimensionale meetkundigen maar te zwijgen.

3.2. Vlakke problemen

Wat is de goede interpretatie van de formules:

$$4R = r + r_a + r_b + r_c$$

$$1/r = 1/r_a + 1/r_b + 1/r_c$$

$$rr_a r_b r_c = O^2$$

Welke relaties tussen de symmetrische functies van a, b en c worden hierdoor uitgedrukt?

Tussen welke grenzen kunnen verhoudingen als $R/r, R/s, r/s, O/s$ enzovoort variëren?

Voor iedere driehoek geldt

$$\frac{s^2 - 4R^2}{O} \leq \frac{11}{9}\sqrt{3}$$

(ongelijkheid van Nakajima, zie bv [4])

Zijn voor een driehoek met zijden a, b en c grenzen te vinden die scherper zijn en expliciet van a, b en c afhangen?

$(2R + r)/s$ is in een rechthoekige driehoek gelijk aan 1, welke waarden heeft dit quotiënt in andere driehoeken?

Wanneer we een punt P (binnen) een driehoek ABC kiezen zouden we de plaats van het punt intrinsiek willen bepalen. Dit kan bijvoorbeeld door de drie afstanden

$$x = PA, \quad y = PB, \quad z = PC.$$

We zagen boven al dat een bi-kwadratische relatie tussen x, y en z en de zijden a, b en c van de driehoek bestaat, die we vinden door het volume van het viervlak met ribben a, b, c, x, y, z nul te stellen.

In het geval $x = y = z$ vinden we zo de straal van de omgeschreven cirkel.

Maar we kunnen het punt P ook vastleggen door de drie afstanden p, q en r tot de drie zijden van de driehoek (indien het punt buiten de driehoek ligt moeten we wellicht met georiënteerde afstanden werken).

Welke relaties bestaan er tussen x, y en z enerzijds en p, q en r anderzijds? Een stelling van MORDELL en ERDÖS [5, p. 9] leert dat voor iedere driehoek en ieder punt P binnen de driehoek

$$x + y + z \geq 2(p + q + r).$$

Zijn voor een speciale driehoek grenzen afhankelijk van a, b en c te vinden? Bottema [6] onderzocht relaties tussen $x^2 + y^2 + z^2$ en $p^2 + q^2 + r^2$.

Vier punten in het vlak geven aanleiding tot vele vragen. De vier punten hebben zes onderlinge afstanden waar tussen zoals we eerder opmerkten een relatie bestaat. Wanneer we eisen dat de vier punten op een cirkel liggen komt er een nieuwe relatie bij. (denk aan de stelling van Ptolemeus over de diagonalen van een koordevierhoek, maar bedenk dat we hier geen onderscheid maken tussen diagonaal en zijde).

De vraag naar de straal van de cirkel door de vier punten ligt voor de hand. Uit de klassieke theorie weten we dat ook de oppervlakte van de koordevierhoek een mooie formule heeft; maar wat is de koordevierhoek als we alleen over vier punten op een cirkel spreken?

De voorwaarde over de raaklijnen vierhoek is niet goed te formuleren, de vier punten bepalen zes lijnen; we zouden dus de eis moeten stellen dat vier van deze zes aan een cirkel raken, algebraïsch gesproken zal dat een voorwaarde van behoorlijke hoge graad worden.

3.3. Stereometrie

Het ligt voor de hand de vragen uit 4.2 te generaliseren naar de ruimte.

Wanneer we op geschikte manier zes lijnstukken geven is daarmee een viervlak te bouwen.

Belangrijke grootheden als oppervlakte, inhoud, stralen in- en omgeschreven bollen hangen op een regelmatige manier van de lengten van de zes ribben af. Het zijn niet noodzakelijk symmetrische functies van deze lengten. Alleen die permutaties van de ribben, die ontstaan door permutaties van de hoekpunten moeten de grootheden invariant laten. We zullen ze voor het ogenblik semisymmetrisch noemen. Het volume vonden we al eerder. Het is aardig de straal van de omgeschreven bol op dezelfde manier af te leiden als de straal van de omgeschreven cirkel. Er moet weer een flinke determinant berekend worden. Kunnen we ook iets interpreteren als generalisatie van de vlakke formule $abc/40$? Punten binnen het viervlak kunnen weer bepaald worden door de vier afstanden tot de hoekpunten of door de vier afstanden tot de zijvlakken. Zou ergens in de literatuur een generalisatie van de stelling van Mordell en Erdős staan?

Natuurlijk zijn nu ook problemen rond vijf punten in de ruimte en de tien afstanden die daar bij horen te onderzoeken. Wanneer liggen vijf punten in de ruimte op een bol? Maar als U al deze problemen opgelost hebt weet U zelf genoeg anderen te verzinnen.

LITERATUUR

1. A.H.M. LEVELT. *Applications of the Gröbner basis algorithm*, A lecture in honour of B. BUCHBERGER. Nijmegen, 28 oktober 1993, (Department of Mathematics, University of Nijmegen, The Netherlands)
2. L.J. OOSTERHOFF. *Restricted free rotation and cyclic molecules*, Leiden, 23-11-1949.
3. A.G. VAN ASCH, F. VAN DER BLIJ. *Hoeken en hun maat*, CWI syllabus 29, 1992.
4. O. BOTTEMA. De ongelijkheid van Nakajima, NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE 48 (1960) p. 161-165.
5. H.S.M. COXETER. INTRODUCTION TO GEOMETRY, New York, 1969/2.
6. O. BOTTEMA. Een minimax-eigenschap van de driehoek, *Nieuw tijdschrift voor wiskunde* 46 (1958) p. 214-219.

Primitiveren door middel van elementaire functies

A.W. Grootendorst

INLEIDING

Het primitiveren van functies is één van de deelgebieden van de wiskunde waarop de computeralgebra zich een krachtig hulpmiddel heeft betoond, doordat zij het mogelijk maakte de daarvoor ontwikkelde algoritmen in vele gevallen in korte tijd uit te voeren.

In deze voordracht zal de wiskundige achtergrond van deze algoritmen aan de orde gesteld worden.

Centraal staat daarbij de beroemde stelling van Joseph Liouville, die het hoogtepunt is van de verhandeling die hij in 1834 deed verschijnen onder de titel: “Mémoire sur les Transcendentes Elliptiques de première et seconde espèce, considérées comme fonctions de leur amplitude”.

Deze stelling doet een uitspraak over de noodzakelijke en voldoende voorwaarde waaronder een gegeven functie een primitieve “bezit”. Uiteraard zal deze laatste uitdrukking zorgvuldig omschreven moeten worden.

Voor vele studenten lijkt het primitiveren een compositum mixtum van enkele verspreide methoden en vele slimme trucjes en zij zullen van harte de woorden van Liouville onderschrijven wanneer hij –sprekende over de pogingen van één van zijn collegae– zegt:

“La méthode générale indiquée par Fontaine n’est en réalité qu’une suite de tâtonnements laborieux dont le moindre défaut est d’être d’une longueur rebutante: ces tâtonnements ne constituent pas un procédé régulier, par la raison que nulle circonstance ne nous apprend au bout de quel nombre d’essais on parviendra au résultat cherché, savoir, à la valeur de l’intégrale qu’on veut calculer, en sorte que si par hasard cette intégrale est impossible sous la forme *algébrique* qu’on lui assigne à priori, on n’en sera jamais averti, quelque loin qu’on pousse les opérations.”

Over zijn eigen werk zegt hij:

“J’ai donné, dans ces deux Mémoires, un moyen infaillible de décider si l’intégrale d’une fonction algébrique quelconque, explicite ou implicite, est ou n’est pas exprimable algébriquement, soit d’une manière implicite, soit d’une manière explicite.”

Dit klinkt zelfbewust, maar hij heeft het waar gemaakt.

Naast Liouville heeft in de 18e eeuw vooral Charles Hermite een belangrijke bijdrage geleverd aan het integreren van rationale functies.

In het begin van de 19e eeuw is er het artikel van G.H. Hardy “The Integration of Functions of a Single Variable” uit 1905, maar de grote doorbraak kwam



JOSEPH LIOUVILLE 1809-1882

met het artikel van E. Risch "The problem of Integration in Finite Terms" uit 1969. Hierin benaderde hij het probleem van algebraïsche zijde en behandelde dit in het licht van de "Differential Algebra". Hierdoor werd het ook mogelijk algoritmen te ontwikkelen die met de komst van de computeralgebra ook daadwerkelijk konden worden uitgevoerd.

1. PRIMITIVEREN VAN RATIONALE FUNCTIES

Voor het primitiveren van rationale functies, d.w.z. van functies van de gedaante $\frac{p(x)}{q(x)}$, waarbij $p(x)$ en $q(x)$ veeltermen zijn met coëfficiënten in een zeker constantenlichaam, bijvoorbeeld \mathbb{Q} , \mathbb{R} of \mathbb{C} , bestaan welbekende methoden. In ieder leerboek over de analyse vindt men de methode die daarin bestaat dat men $q(x)$ "uitdeelt", d.w.z. men bepaalt $t(x)$ en $r(x)$ zodanig dat

$$p(x) = q(x).t(x) + r(x) \text{ met } gr.r(x) < gr.q(x).$$

Het probleem $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ is dan teruggebracht tot de integratie $\int t(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$,

waarin $t(x)$ een veelterm is en $\frac{r(x)}{q(x)}$ nu een rationale functie waarin de teller een lagere graad heeft dan de noemer. Voor de integratie van dit "rationale" deel bestaan verschillende methoden. Men zou de noemer in $\mathbb{C}[x]$ kunnen ontbinden in machten van lineaire factoren en daarna via partiële breuksplitsing de breuk $\frac{r(x)}{q(x)}$ kunnen brengen in de gedaante

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij}}{(x - a_i)^j} \quad (a_i, b_{ij} \in \mathbb{C}).$$

Integratie levert daarna een som van termen van de gedaante

$$\frac{-b_{ij}}{(j-1)(x - a_i)^{j-1}} \quad \text{en} \quad b_{ij} \log(x - a_i).$$

Men zou ook –in $\mathbb{R}(x)$ – zich kunnen beperken tot een ontbinding van $q(x)$ in de gedaante

$$q(x) = (x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_t)^{n_t} \cdot g_1^{m_1}(x) \dots g_s(x)^{m_s},$$

waarbij de a_i reëel zijn en de $g_i(x)$ kwadratische vormen in x met reële coëfficiënten. Daarna zou men via splitsing in partiële breuken verder kunnen gaan.

Het bezwaar van deze methoden is echter dat men in vele gevallen nodeloos veel werk doet door het invoeren van uiteindelijk overbodige constanten.

Zo ziet men bijvoorbeeld onmiddellijk in dat

$$\int \frac{x^4}{(x^5 + 1)^2} dx = -\frac{1}{5(x^5 + 1)} \quad \text{en} \quad \int \frac{x^4}{x^5 + 1} = \frac{1}{5} \log(x^5 + 1).$$

Er zijn dan ook snellere methoden ontwikkeld voor het integreren van rationale functies, bijvoorbeeld door HERMITE (1872), die werkt met de zogenaamde kwadraatvrije ontbinding van $q(x)$, d.w.z. een ontbinding waarbij de factoren $f(x)$ van $q(x)$ worden gerangschikt naar multipliciteit.

Deze behoeven niet irreducibel te zijn, maar worden wel moniek gekozen en er geldt $(f_i(x), f_j(x)) = 1$ als $i \neq j$, dus:

$$q(x) = a \prod_{i=1}^n f_i^i(x) \quad \text{met } a \text{ in het coëfficiëntenlichaam.}$$

Een voorbeeld: $q(x) = \{(x - 1)(x - 2)\}^3 \{(x - 5)(x^2 + 3x + 7)\}^4$.

In 1972 is een variant op deze methode gevonden door Horowitz die het probleem terugbracht tot het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen. Hierop zullen wij niet nader ingaan. De lezer zij hiervoor verwezen naar de literatuur, bijvoorbeeld, DAVENPORT [3] en LEVELT [8].

Natuurlijk stelt de lezer zich de vraag of het mogelijk is een integratiemethode te bedenken waarbij slechts die algebraïsche getallen gebruikt worden die ook in de uitkomst voorkomen. Ook hiervoor zij de lezer verwezen naar de zожuist genoemde literatuur en naar TRAGER [15]. En passant zij opgemerkt dat dit met een veel algemener probleem samenhangt: men kan ook niet voor ieder probleem aangaande gehele getallen een oplossing vinden met uitsluitend

gebruik van gehele getallen; men denke slechts aan het probleem van Fermat! Er is zelfs wel eens gezegd: “de weg tussen twee reële waarheden loopt via het complexe vlak”.

De rest van deze voordracht is gewijd aan het primitiveren van andere dan rationale functies, maar daarvoor is eerst een inleiding nodig in de differentiaalalgebra.

2. HET BEGRIP DIFFERENTIAALLICHAAM

Een (commutatief) lichaam K heet een differentiaallichaam indien er een afbeelding is gedefinieerd van K in K (differentiatie genoemd en aangegeven met $a \mapsto a'$) die voldoet aan de volgende eisen:

$$(a + b)' = a' + b' \text{ en } (ab)' = a'b + ab'.$$

Men noemt a' de afgeleide van a en a een integraal van a' .

Men bewijst dan eenvoudig:

$$\text{i } (a^n)' = na^{n-1}a' \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{ii } \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2} \quad (b \neq 0).$$

Indien men deze operatie n -maal toepast op a ($n \in \mathbb{N}$), dan geeft men het resultaat aan met $a^{(n)}$. Hiervoor geldt de regel van Leibniz:

$$\text{iii } (ab)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{(n-i)} b^{(i)}.$$

Ook geldt de regel voor “logaritmisch differentiëren”

$$\text{iv } \frac{(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_t^{n_t})'}{a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_t^{n_t}} = n_1 \frac{a_1'}{a_1} + n_2 \frac{a_2'}{a_2} + \dots + n_t \frac{a_t'}{a_t} \quad (n_i \in \mathbb{Z}).$$

De elementen van K met afgeleide nul, noemt men de *constanten* van K . Men bewijst gemakkelijk dat deze een deellichaam van K vormen.

Een eenvoudig voorbeeld van een differentiaallichaam is het lichaam $\mathbb{Q}(x)$ van alle rationale functies in de reële variabele x met coëfficiënten in \mathbb{Q} , met de gebruikelijke differentiatie. Evenzo $\mathbb{R}(x)$ en het lichaam $\mathbb{C}(z)$ van alle meromorfe functies in een complexe variabele met coëfficiënten in \mathbb{C} .

Onder een *differentiaaluitbreiding* L van het differentiaallichaam K verstaan we een lichaam dat K omvat en dat voorzien is van een differentiatie, die –indien beperkt tot K – samenvalt met de reeds op K gedefinieerde differentiatie. Men geeft zo'n uitbreiding van K aan met: $K \subset L$.

Hiervoor geldt de

STELLING

Laat K een differentiaallichaam zijn met karakteristiek nul¹ en laat $K \subset L$ een uitbreiding zijn van K . Men kan dan ook op L een differentiatie definiëren

¹D.w.z. als $n \in \mathbb{Z}$ en $a \in K$ dan geldt $na = 0$ d.e.s.d. als $n = 0$.

die-indien beperkt tot de elementen van K -overeenstemt met de reeds op K gedefinieerde differentiatie. Indien L een algebraïsche² uitbreiding van K is, dan is deze voorzetting van de differentiatie over L eenduidig bepaald. Voor het bewijs zie KAPLANSKY [6], LEVELT [8] en ROSENLICHT [13], [14].

3. ELEMENTAIRE UITBREIDINGEN

Allereerst twee definities:

- i Laat $K \subset L$ een differentiaaluitbreiding zijn van het differentiaallichaam K , dan is een element a van L een *exponentiaal over K* indien er in K een element b is, z.d.d. $a' = ab'$; a heet dan de *exponentiaal van b* .
Hier heeft de situatie uit de analyse model gestaan: als $f(x)$ en $g(x)$ tot $\mathbb{R}(x)$ behoren en $f(x) = e^{g(x)}$, dan geldt immers: $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = f(x) \cdot g'(x)$.
- ii Laat $K \subset L$ een differentiaaluitbreiding zijn van het differentiaallichaam K , dan is een element a van L een *logaritme over K* indien er in K een element b is, z.d.d. $a' = \frac{b'}{b}$; a heet dan de *logaritme van b* .

Ook hier heeft de analyse model gestaan:

Als $f(x)$ en $g(x)$ tot $\mathbb{R}(x)$ behoren en $f(x) = \log\{g(x)\}$, dan geldt: $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

Het is duidelijk dat, als a de exponentiaal is van b , b ook de logaritme van a is en omgekeerd.

In het gehele verhaal dat nu volgt speelt de volgende *definitie* een belangrijke rol:

Als K een differentiaallichaam is en L een differentiaallichaam dat K omvat, dan heet L een *elementaire uitbreiding van K* als L ontstaan is door achtereenvolgende adjuncties³ van algebraïsche elementen, exponentialen of logaritmen, d.w.z.

$$L = K(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

waarbij t_i òf algebraïsch is over $K(t_1, t_2, \dots, t_{i-1})$ òf een exponentiaal òf een logaritme is over $K(t_1, t_2, \dots, t_{i-1})$.

4. TWEE BELANGRIJKE HULPSTELLINGEN

Allereerst dit: als $K \subset L$ een differentiaaluitbreiding is van K en $\alpha \in L$, dan krijgt men vaak te maken met de afgeleide van een "polynoom" $p(\alpha) \in K[\alpha]$. Indien $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0$ ($a_i \in K$), dan geldt natuurlijk:

$$\begin{aligned} (p(\alpha))' &= a'_n \alpha^n + a_n \cdot n \alpha^{n-1} \alpha' + a'_{n-1} \alpha^{n-1} + a_{n-1} (n-1) \alpha^{n-2} \alpha' + \dots + a'_0 = \\ &= (a'_n \alpha^n + a'_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a'_0) + (n a_n \alpha^{n-1} + (n-1) a_{n-1} \alpha^{n-2} + \\ &+ \dots + a_1) \alpha'. \end{aligned}$$

²Zie appendix

³Zie appendix

Men gebruikt vaak de volgende notatie.

Indien $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, dan stelt men

$$f_x(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

$$f'(x) = a'_n x^n + a'_{n-1} x^{n-1} + \dots + a'_0.$$

Er geldt dan:

$$(p(\alpha))' = f'(\alpha) + (f_x(\alpha)) \cdot \alpha'.$$

Het gaat nu om de volgende hulpstellingen.

- A. Laat K een differentiaallichaam zijn en $K(t)$ een differentiaaluitbreiding van K met hetzelfde constantenlichaam als K , waarbij t transcendent (d.w.z. niet-algebraïsch) is over K en $t' \in K$, hetgeen o.a. het geval is als t een logaritme is over K .

Voor een polynoom $f(t) \in K[t]$ met graad ≥ 1 , geldt dan het volgende:

- i. $gr.(f(t))' = gr.f(t)$ indien de kopcoëfficiënt niet constant is.
- ii. $gr.(f(t))' = gr.f(t) - 1$ indien de kopcoëfficiënt wel constant is.

BEWIJS:

Stel $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$, dan

$$\begin{aligned} (f(t))' &= a'_n t^n + n a_n t^{n-1} t' + a'_{n-1} t^{n-1} + \dots + a'_0 = \\ &= a'_n t^n + (n a_n t' + a'_{n-1}) t^{n-1} + \dots + a'_0. \end{aligned}$$

Als nu a_n niet constant is, dan $a'_n \neq 0$ en dus $gr.f(t) = gr.(f(t))'$. Als echter a_n wel constant is, dan $a'_n = 0$, maar de coëfficiënt van t^{n-1} is dan niet nul, daar uit $n a_n t' + a'_{n-1} = 0$, volgt dat $n a_n t' + a'_{n-1}$ constant is en dus in K ligt (K en $K(t)$ hebben hetzelfde constantenlichaam); dan zou ook t in K liggen, maar t is transcendent over K . Tegenspraak, dus $n a_n t' + a'_{n-1} \neq 0$, dus dan geldt: $gr.(f(t))' = gr.f(t) - 1$. \square

- B. Laat K een differentiaallichaam zijn en $K(t)$ een differentiaaluitbreiding van K met hetzelfde constantenlichaam als K , waarbij t transcendent is over K en $\frac{t'}{t} \in K$, hetgeen zich voordoet als t een exponentiaal over K is.

Er geldt dan het volgende:

- i. Voor alle $a \in K$ en alle $n \in \mathbb{Z}$ met $a \neq 0, n \neq 0$ zal

$$(at^n)' = ct^n \quad \text{voor zekere } c \in K (c \neq 0).$$

- ii. Voor alle $f(t) \in K[t]$ met graad ≥ 1 geldt:

$$gr.(f(t))' = gr.(f(t)).$$

iii. $f(t)$ is dan en slechts dan deelbaar op $(f(t))'$ indien $f(t)$ een éénterm is.

BEWIJS:

i. Stel $\frac{t'}{t} \in K$, bijv. $t' = bt$ met $b \in K$, dan geldt $(at^n)' = a't^n + ant^{n-1}t' = (a' + nab)t^n$, met $a' + nab \neq 0$ daar anders $(at^n)' = 0$ en dus at^n constant, maar omdat $K(t)$ en K hetzelfde constantenlichaam hebben, zou dan $at^n \in K$ en dus zou t algebraïsch zijn over K , maar t is transcendent ondersteld over K .

ii. Als $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$, dan

$$(f(t))' = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} \dots + b_0 \text{ met } b_n \neq 0 \quad (\text{zie i}),$$

$$\text{dus } gr.f(t) = gr.(f(t))'.$$

iii.a. Stel $f(t)$ is deelbaar op $(f(t))'$ en géén éénterm, dan

$$f(t) = a_n t^n + \dots + a_m t^m + \dots + a_0$$

met $a_n \neq 0$ en $a_m \neq 0$ voor zekere $m \neq n$.

Er geldt dan

$$(f(t))' = (a'_n + na_n b)t^n + \dots + (a'_m + ma_m b)t^m + \dots + a'_0$$

Echter is $(f(t))'$ een veelvoud van $f(t)$ met dezelfde graad, dus

$$\frac{a'_n + na_n b}{a_n} = \frac{a'_m + ma_m b}{a_m}$$

en dus

$$\frac{a'_n + na_n \frac{t'}{t}}{a_n} = \frac{a'_m + ma_m \frac{t'}{t}}{a_m}$$

en dus ook

$$\frac{a'_n}{a_n} - \frac{a'_m}{a_m} + n \frac{t'}{t} - m \frac{t'}{t} = 0$$

hetgeen betekent

$$\left(\frac{a_n t^n}{a_m t^m} \right)' = 0$$

en dus $\frac{a_n}{a_m} t^{n-m}$ constant en dus in K , omdat K en $K(t)$ hetzelfde constantenlichaam hebben. Aangezien $n - m \geq 1$, zou dit betekenen dat t algebraïsch is over K , in tegenstelling tot het onderstelde dat t transcendent is over K .

- iii.b Het omgekeerde is triviaal: als nl. $f(t)$ een éénterm is, zeg $f(t) = at^m$ met $a \neq 0$, dan geldt, zoals we zagen: $(f(t))' = (a' + mab)t^m$ en dus $f(t)|(f(t))'$. \square

5. HET CENTRALE PROBLEEM

Wanneer op een lichaam K een differentiatie is gedefinieerd die –zoals gezegd– aan iedere $a \in K$ een $a' \in K$ toevoegt, dan rijst al snel de vraag: kan iedere $a \in K$ ook als beeld onder deze afbeelding optreden, m.a.w. is er bij gegeven $a \in K$ een $y \in K$ te vinden z.d.d. $y' = a$? In het algemeen zal deze vraag ontkennend beantwoord moeten worden en daarom zullen we K uitbreiden tot een differentiaallichaam L (met uiteraard een differentiatie die –beperkt tot K – samenvalt met de op K gedefinieerde differentiatie), waarin we wel een oplossing hopen aan te treffen. Deze uitbreiding vindt dan plaats door achtereenvolgende adjuncties⁴ van algebraïsche elementen, logaritmen en exponentialen. We noemden deze uitbreidingen al elementaire uitbreidingen. Maar zelfs dan zal men niet altijd een uitbreiding L vinden waarin een y ligt z.d.d. $y' = a$. Neem bijv. $K = \mathbb{R}(x)$, het lichaam van alle rationale functies met reële coëfficiënten. Kiest men hierin $a = \frac{1}{x^2+1}$, dan kan men een uitbreiding van $\mathbb{R}(x)$ construeren waarin de vergelijking $y' = \frac{1}{x^2+1}$ een oplossing heeft, nl. $\mathbb{R}(x)(i, \ln(1+ix), \ln(1-ix))$. Deze oplossing is immers $y = \arctan x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix}$.

Bevat echter K een a met $a = e^{x^2}$, dan is er –zoals we zullen zien– geen elementaire uitbreiding van K waarin een y ligt zodanig dat $y' = e^{x^2}$.

Het probleem doet denken aan de vraag welke hogere-machtsvergelijkingen met coëfficiënten in een lichaam K oplosbaar zijn met behulp van wortelvormen in de coëfficiënten en welke niet. Deze vraag werd beantwoord door EVARISTE GALOIS (1811–1832). De oplossing ligt ook hier in het uitbreiden van K door herhaalde adjuncties van geschikt gekozen elementen, in dit geval zuivere wortels uit elementen behorende tot reeds door adjunctie verkregen uitbreidingen van het grondlichaam K . Daarbij blijkt dat slechts voor vergelijkingen van de graad 2, 3 en 4 uitbreidingen bestaan waarin de gezochte wortels liggen.

Het centrale probleem is nu: hoe ziet men aan de gedaante van een element a in K of er een differentiaaluitbreiding $K \subset L$ bestaat waarin een y ligt met $y' = a$ en –zo deze L bestaat– is er dan een algoritme waarmee deze y expliciet berekend kan worden?

Het antwoord op de eerste vraag wordt gegeven door de stelling van Liouville-Rosenlicht.

De tweede vraag werd voor een deel beantwoord door R. RISCH in 1969 en J.H. DAVENPORT in 1984.

6. DE STELLING VAN LIOUVILLE-ROSENLICHT

Deze stelling geeft antwoord op de vraag onder welke voorwaarde de vergelijking $y' = a$ –waarbij a in een differentiaallichaam K ligt– een oplossing heeft in een

⁴Zie appendix

elementaire uitbreiding van K .

De stelling luidt als volgt:

Laat K een differentiaallichaam zijn met karakteristiek nul en laat a tot K behoren.

Er bestaat dan een elementaire differentiaaluitbreiding L van K met hetzelfde constantenlichaam als K , dan en slechts dan indien a de volgende gedaante heeft:

$$a = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v', \quad (*)$$

waarbij u_1, u_2, \dots, u_n en v elementen van K zijn en c_1, c_2, \dots, c_n constanten van K .

OPMERKINGEN VOORAF:

- i. Het is direct duidelijk dat de genoemde voorwaarde voldoende is: adjunctie van elementen t_i die voldoen aan $t_i' = \frac{u_i'}{u_i}$ d.w.z. logaritmen over K , geeft de gevraagde uitbreiding.
- ii. De voorwaarde dat L hetzelfde constantenlichaam heeft als K is essentieel, immers neem als voorbeeld $K = \mathbb{R}(x)$ en kies $a = \frac{1}{x^2+1}$. Er geldt dan, als $y' = a : y = \arctan x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix}$, dus de oplossing ligt in de elementaire uitbreiding $L = \mathbb{R}(x)(i, \log(1+ix), \log(1-ix))$. Deze uitbreiding heeft meer constanten dan $\mathbb{R}(x)$ en het is ook niet zo dat we kunnen schrijven

$\frac{1}{x^2+1} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$ met c_i constant in $\mathbb{R}(x)$ en u_i en v in $\mathbb{R}(x)$, hetgeen met enig rekenwerk te bewijzen is. Zien we L als uitbreiding van $\mathbb{C}(x)$, dan is de schrijfwijze wel mogelijk:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{-\frac{1}{2}i}{x-i} + \frac{\frac{1}{2}i}{x+i}.$$

BEWIJS:

We merken al op dat de voorwaarde voldoende is en moeten dus nog het volgende bewijzen:

Indien er een uitbreiding $L = K(t_1, t_2, \dots, t_p)$ van het differentiaallichaam K bestaat (met hetzelfde constantenlichaam als K), waarbij $t_i (i = 1, 2, \dots, p)$ algebraïsch zijn over $K(t_1, t_2, \dots, t_{i-1})$ of logaritmen of exponentialen en indien de vergelijking $y' = a$ daarin een oplossing heeft, dan heeft a de gedaante:

$$a = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

met u_1, u_2, \dots, u_n en v in K en c_1, c_2, \dots, c_n constanten van K .

Het bewijs berust op volledige inductie naar het aantal geadjungeerde elementen t_i .

We gaan er vanuit dat de stelling juist is in het geval van adjunctie van p elementen van de vereiste gedaante (voor $p = 0$ is de stelling triviaal) en tonen dan de juistheid aan voor $p + 1$, d.w.z. we nemen aan: als $a \in K$ en $y' = a$ oplosbaar is in

$$L = K(t_1, t_2, t_3, \dots, t_p)$$

(met hetzelfde constantenlichaam en t_i als boven bedoeld), dan heeft a de vereiste gedaante.

Indien we schrijven:

$$L = K(t_1)(t_2, t_3, \dots, t_{p+1})$$

dan is L een uitbreiding van $K(t_1)$ d.m.v. p elementen en volgens de inductieaanname geldt dan

$$a = \sum_{i=1}^n c_i \frac{(u_i(t_1))'}{u_i(t_1)} + (v(t_1))' \quad (*)$$

met $u_i(t_1), v(t_1) \in K(t_1)$ en c_i constant in $K(t_1)$ dus in K ($i = 1, 2, \dots, n$).

Voor het gemak schrijven we verder t i.p.v. t_1 , en moeten dan aantonen dat $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), v(t)$ in K liggen. Populair gezegd: we moeten t "wegpraten". We onderscheiden bij het bewijs drie gevallen.

A. t is transcendent over K en een logaritme over K , dus

$$t' = \frac{d'}{d} \quad (d \in K).$$

B. t is transcendent over K en een exponentiaal over K , d.w.z. $t' = td'$ ($d \in K$).

C. t is algebraïsch over K .

A. Allereerst merken we op dat we elke $u_i(t)$ in (*) kunnen schrijven als het produkt van een element van K en van machten van monieke irreducibele polynomen in $K[t]$. De som $\sum_{i=1}^n c_i \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)}$ is dan te herleiden tot een som van termen van de gedaante $d_s \frac{p_s'(t)}{p_s(t)}$ waarin $d_s \in K$ en de polynomen $p_s(t)$ monieke irreducibele en onderling verschillende elementen van $K[t]$ zijn. Vervolgens bezien we $v(t)$. Via partiële breuksplitsing zien we dat $v(t)$ te schrijven is als een veelterm in $K[t]$ en een som van termen van de gedaante $\frac{h(t)}{(f(t))^r}$ met $h(t)$ en $f(t) \in K[t]$; $gr.h(t) < gr.f(t)$; $f(t)$ moniek en irreducibel en $r \in \mathbb{N}$.

Volgens hulpstelling A op bldz. 82 geldt dan $gr.(f(t))' = gr.f(t) - 1$ en dus $f(t) \nmid (f(t))'$.

Laat nu $m(\geq 1)$ de grootste exponent zijn waarmee $f(t)$ in een noemer in $v(t)$ voorkomt, dan bevat $(v(t))'$ een term $\frac{-mh(t)(f(t))'}{(f(t))^{m+1}}$ en daar $(f(t)) \nmid (f(t))'$, blijft $(f(t))^{m+1}$ in de noemer en deze kan niet wegvallen tegen een andere term in $(v(t))'$ en ook niet tegen een term in $\sum_{i=1}^n \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)}$ omdat –zoals we zagen– daarin uiteindelijk alle noemers slechts eerste machten van irreducibele veeltermen bevatten. Het linkerlid van (*) bevat echter geen t , dus moet $v(t)$ een *veelterm* zijn in t .

Verder is het eenvoudig in te zien dat de $u_i(t)$ geen t kunnen bevatten, omdat de optredende noemers in de $\sum_{i=1}^n \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)}$ niet kunnen wegvallen. De conclusie is dan: $(v(t))' \in K$.

Op grond van hulpstelling A geldt dan $v(t) = c_0 t + v_0$ met c_0 en v_0 in K en zelfs c_0 constant in K . Dan geldt: $(v(t))' = c_0 t' + v_0'$, waarin t een logaritme is met $t' = \frac{d'}{d}$. De uitdrukking (*) op bldz. 86 krijgt dan inderdaad de gewenste gedaante:

$$a = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + c_0 \frac{d'}{d} + v_0'$$

met $c_0, c_1, \dots, c_n, u_1, u_2, \dots, u_n, d$ en v_0 in K en c_0, c_1, \dots, c_n constant in K .

- B. In het geval dat t transcendent is en een exponentiaal is met $t' = td'$ ($d \in K$) gaat de redenering van A voor een gedeelte ook op. Maar de bewering $(f(t)) \nmid (f(t))'$ is niet voor alle $f(t)$ juist. In de hulpstelling B op bldz. 6 zagen we sub iii;

$$f(t) \mid (f(t))' \Leftrightarrow f(t) \text{ is een éénterm.}$$

We hebben $f(t)$ moniek ondersteld dus voor $f(t) = t$ moeten we een uitzondering maken, d.w.z. $v(t)$ is nu niet gegarandeerd een polynoom in $F[t]$, maar kan de gedaante $\frac{a-m}{t^m} + \frac{a-m+1}{t^{m-1}} + \dots + \frac{a-1}{t} + a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ hebben. Ook m.b.t. de $u_i(t)$ verandert er iets: zij behoeven niet alle in K te liggen, één ervan, zeg u_1 kan t zijn; er geldt dan toch: $\frac{(u_1(t))'}{u_1(t)} = \frac{t'}{t} = d'$ dus toch weer geldt $(v(t))' \in K$, hetgeen op grond van hulpstelling Bii impliceert $v(t) \in K$, zeg $v(t) = v_0$. Op grond hiervan krijgt de uitdrukking (*) op bldz. 10 de gedaante:

$$a = c_1 \frac{t'}{t} + \sum_{i=2}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v_0' = \sum_{i=2}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + (c_1 d + v_0)'$$

met c_2, c_3, \dots, c_n constanten in K en $u_2, u_3, \dots, u_n, (c_1 d + v_0)$ in K .

- C. Indien t algebraïsch is over K , dan is er een éénduidig bepaald moniek, irreducibel polynoom $P(x) \in K[x]$ - zeg van de graad s - zodanig dat

$P(t) = 0$, het zogenaamde definiërende polynoom van t en elk element van $K(t)$ is op éénduidige wijze te schrijven als een polynoom in t met coëfficiënten in K en graad hoogstens $(s - 1)$.

Bij $u_i(t)$ en $v(t)$ behoren dus *polynomen* $U_i(x)$ en $V(x)$ in $K[x]$ zodanig dat

$$u_i(t) = U_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{en } v(t) = V(t)$$

Wij stellen de geconjugeerden van t , d.w.z. t en de andere wortels van $P(x) = 0$, voor door:

$$\tau_1 (= t), \tau_2, \dots, \tau_s.$$

Aangezien $a \in K$ en dus gelijk is aan zijn geconjugeerden, geldt voor elke geconjugeerde τ_j :

$$a = \sum_{i=0}^n c_i \frac{(U_i(\tau_j))'}{U_i(\tau_j)} + (V(\tau_j))'.$$

We sommeren over de s geconjugeerden $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ en delen door s . Het resultaat is dan:

$$a = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s} \frac{(U_i(\tau_1) \dots U_i(\tau_s))'}{U_i(\tau_1) \dots U_i(\tau_s)} + \left[\frac{V(\tau_1) + \dots + V(\tau_s)}{s} \right]'$$

(denk aan de logaritmische afgeleide).

Aangezien $U_i(\tau_1) \dots U_i(\tau_s)$ en $V(\tau_1) + \dots + V(\tau_s)$ als resp. norm en spoor in K liggen is ook in dit geval de stelling van Liouville-Rosenlicht bewezen.

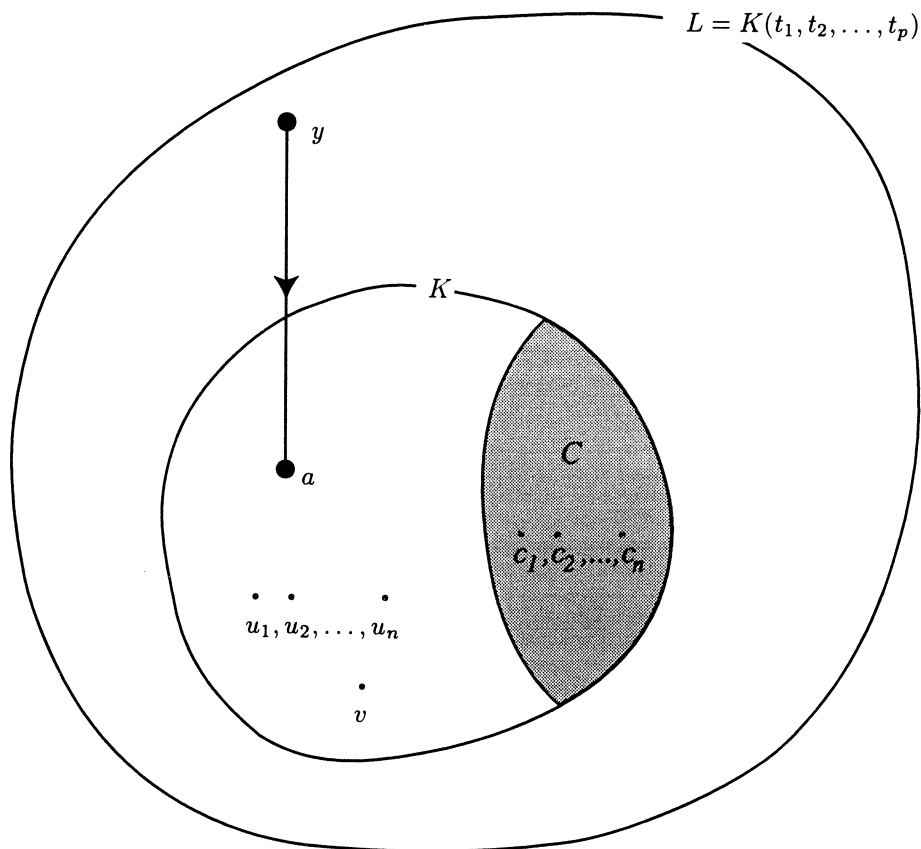
In Figuur 1. vindt men een toelichting op de situatie. Hierin is C het gemeenschappelijke constantenlichaam van K en L .

7. EEN UITBREIDING VAN DE STELLING VAN LIOUVILLE-ROSENLICHT

Van laatstgenoemde stelling bestaat een sterkere variant die hier slechts genoemd wordt. Voor het bewijs ervan wordt verwezen naar de literatuur DAVENPORT e.a. [3], LEVELT [8], RISCH [11].

De formulering luidt als volgt:

Laat K een differentiaallichaam zijn met constantenlichaam C en laat $a \in K$ zodanig zijn dat de vergelijking $y' = a$ oplosbaar is in een elementaire uitbreiding L van K . Er bestaat dan een uitbreiding \tilde{K} van K , voortgebracht



$$y' = a \iff a = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

C constantenlichaam van K en L

FIGUUR 1.

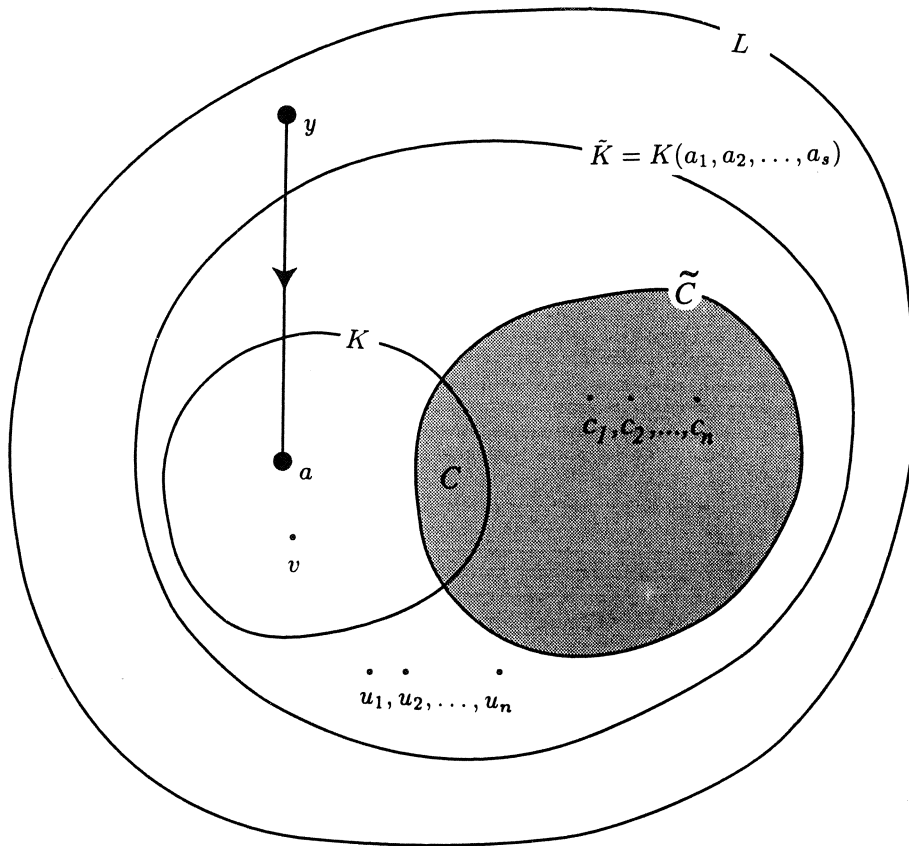
door een eindig aantal constanten a_1, a_2, \dots, a_s die algebraïsch zijn over C (met constantenlichaam $C_{\bar{K}}$), alsook een $v \in K, u_1, u_2, \dots, u_n \in \bar{K}$ en $c_1, c_2, \dots, c_n \in C_{\bar{K}}$ zodanig dat

$$a = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'.$$

Figuur 2 licht de situatie toe.

8. EEN TOEPASSING VAN DE STELLING VAN LIOUVILLE-ROSENBLITH

In deze paragraaf zullen we voor een bepaald soort integralen nagaan onder



$$y' = a \iff a = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

C constantenlichaam van K

\tilde{C} constantenlichaam van $\tilde{K} = K(a_1, a_2, \dots, a_s)$

FIGUUR 2.

welke voorwaarden deze elementair zijn, waarmee we bedoelen dat ze liggen in een elementaire uitbreiding van $\mathbb{C}(z)$. Hierbij is, zoals gebruikelijk, $\mathbb{C}(z)$ het lichaam van de rationale functies in de complexe variabele z met complexe coëfficiënten.

Daartoe hebben we nodig de volgende

HULPSTELLING:

Indien $g(z) \in \mathbb{C}(z)$ en niet constant, dan is $e^{g(z)}$ niet algebraïsch over $\mathbb{C}(z)$.

BEWIJS:

Stel dat $e^{g(z)}$ wèl algebraïsch is over $\mathbb{C}(z)$, dan voldoet $e^{g(z)}$ aan een betrekking van de gedaante

$$e^{ng(z)} + a_{n-1}(z)e^{(n-1)g(z)} + \dots + a_0(z) = 0 \quad (*)$$

met $a_i(z) \in \mathbb{C}(z)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Differentiatie geeft dan

$$e^{ng(z)} \cdot n \cdot g'(z) + \{a'_{n-1}(z) + (n-1)a_{n-1}(z)g'(z)\}e^{(n-1)g(z)} + \dots + a'_0(z) = 0. \quad (**)$$

hetgeen weer een polynoom is in $e^{g(z)}$ van de graad n .

Aangezien (*) het definiërend polynoom van $e^{g(z)}$ is, moeten in (*) en (**) de coëfficiënten evenredig zijn, dus

$$ng'(z) = \frac{a'_0(z)}{a_0(z)}.$$

Maar $\frac{a'_0(z)}{a_0(z)} = 0$ of (we werken in $\mathbb{C}(z)$!) een som van breuken van de gedaante $\frac{\alpha}{z-\beta}$ en $g(z)$ heeft de gedaante $g(z) = f(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j}$ met $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ en $\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{C}$, maar dan heeft $g'(z)$ òf géén z in de noemers of tenminste één term van de gedaante $(z-\beta_i)^m$ met m minstens 2, in ieder geval geen lineaire term $(z-\beta_i)$ in een noemer, die echter wel in het rechterlid voorkomen als $\frac{a'_0(z)}{a_0(z)} \neq 0$.

De conclusie is dus: $\frac{a'_0(z)}{a_0(z)} = 0$ en dus ook $g'(z) = 0$, maar dit geeft een tegenspraak daar we $g(z)$ niet constant onderstelden.

We stellen ons nu de vraag: wanneer is $\int f(z)e^{g(z)}dz$ elementair?

(N.B. $f(z), g(z) \in \mathbb{C}(z)$; $f(z) \neq 0$; $g(z)$ niet constant).

We schrijven in het vervolg $e^{g(z)} = t$, dan is t transcendent over $\mathbb{C}(z)$, zoals we bewezen, en $\frac{t'}{t} = g'(z) \in \mathbb{C}(z)$. Verder ligt $f(z)e^{g(z)}$ in $\mathbb{C}(z, t)$, waarbij $\mathbb{C}(z, t)$ een transcendente uitbreiding is van $\mathbb{C}(z)$,

We vragen ons nu af of er een elementaire uitbreiding is van $\mathbb{C}(z, t)$ waarin een y ligt met $y' = f(z)e^{g(z)} = f(z) \cdot t$.

Ten overvloede: $\mathbb{C}(z, t)$ speelt de rol van K en $f(z) \cdot t$ die van a in de uitdrukking (*) op bldz. 85 en de noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat $f(z)e^{g(z)}$ elementair integreerbaar is, is dat er constanten c_1, c_2, \dots, c_n in \mathbb{C} zijn alsook u_1, u_2, \dots, u_n en v in $\mathbb{C}(z, t)$ zodanig dat

$$f \cdot t = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u'_i}{u_i} + v'.$$

N.B. f, u_i en v staan voor: $f(z), u_i(z, t)$ en $v(z, t)$.

We ontbinden u_i in irreducibele factoren in $\mathbb{C}(z)(t)$ (uiteraard met eventueel negatieve exponenten) en kunnen dan garanderen dat deze factoren òf tot $\mathbb{C}(z)$

behoren of monieke, irreducibele veeltermen in $\mathbb{C}(z)[t]$ zijn. Verder splitsen v in een veelterm behorende tot $\mathbb{C}(z)[t]$ en partiële breuken.

Evenals in het geval B op bldz. 87 kunnen we dan bewijzen dan $u_i \in \mathbb{C}[z]$ of $u_i = t$ en dat de enige noemers in v kunnen zijn: machten van t . Uit de eerste opmerking volgt ook hier $\frac{u'_i}{u_i} \in \mathbb{C}(z)$ voor alle i , daar immers ook als $u_i = t$, geldt $\frac{u'_i}{u_i} = \frac{t'}{t} = g'(z) \in \mathbb{C}(z)$ en uit de tweede opmerking volgt $v = \sum_j b_j t^j$ met

$b_j \in \mathbb{C}(z)$ en j eventueel negatief geheel.

We hebben echter:

$$ft = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u'_i}{u_i} + \left(\sum_j b_j t^j \right)' \quad (*)$$

Het linkerlid is van de eerste graad in t , dus het rechterlid ook.

Voor

$$v(t) = \left(\sum_j b_j t^j \right) \text{ geldt dus}$$

$$(v(t))' = a_0 + a_1 t.$$

Omdat t een exponentiaal is over $\mathbb{C}(z)$ ($t' = tg'(z)$) geldt volgens hulpstelling B op blz. 6 $gr.(v(t))' = gr.v(t)$, dus ook $v(t)$ is van de eerste graad bijv. $v(t) = b_0 + b_1 t$, maar dan geldt

$$(v(t))' = b'_0 + b'_1 t + b_1 t' = b'_0 + (b'_1 + b_1 g')t$$

en dus (zie $*$) op deze bladzijde)

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{u'_i}{u_i} + b'_0 = 0 \quad \text{en} \quad f = b'_1 + b_1 g'.$$

Als we voor b_1 schrijven: $h(z)$, dan is dus voor de integreerbaarheid van $f(z)e^{g(z)}$ vereist dat er een $h(z) \in \mathbb{C}(z)$ bestaat zodanig dat

$$\boxed{f(z) = h'(z) + h(z)g'(z).}$$

Omgekeerd is het duidelijk dat deze voorwaarde voldoende is. Immers, als

$$f(z) = h'(z) + h(z)g'(z)$$

dan geldt

$$(h(z)e^{g(z)})' = h'(z)e^{g(z)} + h(z)e^{g(z)}.g'(z) = f(z)e^{g(z)}.$$

De genoemde voorwaarde die we oplegden aan $f(z)$ is dus nodig en voldoende voor de integreerbaarheid van $f(z)e^{g(z)}$.

9. ENKELE CONCRETE VOORBEELDEN

1. $\int e^{z^2} dz$. Met de notaties uit de vorige paragraaf geldt voor deze integraal: $f(z) = 1$ en $g(z) = z^2$. De vraag is nu of er een $h(z) \in \mathbb{C}(z)$ bestaat zodanig dat

$$1 = h'(z) + h(z).2z$$

Schrijven we

$$h(z) = p(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z - \beta_i)^j}$$

met

$$p(z) \in \mathbb{C}[z]; \alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{C}; j \in \mathbb{N}$$

dan moet gelden

$$1 = p'(z) - \sum_{i,j} \frac{j\alpha_{ij}}{(z - \beta_i)^{j+1}} + 2zp(z) + \sum_{i,j} \frac{2z\alpha_{ij}}{(z - \beta_i)^j}.$$

Dan moeten echter alle α_{ij} nul zijn en

$$1 = p'(z) + 2zp(z),$$

waarin $p(z)$ een veelterm in z is, bijv.

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m \quad \text{met} \quad a_m \neq 0$$

Dit is echter onmogelijk daar het rechterlid dan een term $2a_mz^{m+1}$ zou bevatten die niet kan wegvallen daar $m \geq 0$. De vergelijking

$$1 = h'(z) + h(z).2z$$

is dus niet oplosbaar in $\mathbb{C}(z)$ en e^{z^2} is derhalve niet primitiveerbaar.

2. $\int \frac{e^z}{z} dz$. Hier geldt $f(z) = \frac{1}{z}$, $g(z) = z$. We moeten dus in $\mathbb{C}(z)$ een $h(z)$ bepalen zodanig dat

$$\frac{1}{z} = h'(z) + h(z).$$

We stellen weer

$$h(z) = p(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z - \beta_i)^j}$$

met $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ en $\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{C}; j \in \mathbb{N}$.
Er moet dan gelden:

$$\frac{1}{z} = p'(z) - \sum_{i,j} \frac{j\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^{j+1}} + p(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j}.$$

Eenvoudig is te zien dat dan $\alpha_{ij} = 0$.
Rest de eis

$$\frac{1}{z} = p'(z) + p(z),$$

waaraan uiteraard niet voldaan kan worden omdat $p(z) \in \mathbb{C}[z]$.

3. $\int \frac{\sin iz}{z} dz$. Het gaat dan in feite om $\int \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz$.
We zoeken een oplossing in een elementaire uitbreiding van $\mathbb{C}(z, t)$, waarin $t = e^z$.
De eis is nu dat er elementen u_i en v in $\mathbb{C}(z, t)$ bestaan en $c_i \in \mathbb{C}$, zodanig dat

$$\frac{t^2 - 1}{tz} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'.$$

We volgen de redenering van bldz. 91 en kunnen dan op analoge wijze concluderen dat $u_i \in \mathbb{C}(z)$ eventueel m.u.v. één u_i , zeg u_1 , die gelijk is aan t , maar dan geldt toch wel dat $\frac{t'}{t} = 1 \in \mathbb{C}(z)$. Tevens geldt op grond van deze redenering dat $v(t) = \sum_j b_j t^j$ met eventueel j negatief geheel.

We vinden dus als eis:

$$\frac{t}{z} - \frac{1}{tz} = A(z) + (v(t))'$$

met $A(z) \in \mathbb{C}(z)$.

We zagen dat $v(t) = \sum_j b_j t^j$, maar uit de vorige vergelijking blijkt dat $v(t)$ geen lagere macht van t kan bevatten dan $\frac{1}{t}$ en geen hogere dan t dus

$$v(t) = \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t,$$

maar dan zou

$$\begin{aligned} (v(t))' &= \frac{a'_{-1}}{t} - a_{-1} \frac{t'}{t^2} + a'_0 + a'_1 t + a_1 t' \\ &= \frac{a'_{-1} - a_{-1}}{t} + a'_0 + (a'_1 + a_1)t, \end{aligned}$$

en dus

$$\frac{t}{z} - \frac{1}{zt} = A(z) + a'_0 + (a'_1 + a_1)t + \frac{a'_{-1} - a_{-1}}{t}.$$

Dan zou ook

$$\frac{1}{z} = a'_1(z) + a_1(z)$$

waarin $a_1(z)$ een rationale functie is van z , met coëfficiënten in \mathbb{C} , hetgeen gezien de ontbinding van $a_1(z)$ in (lineaire) factoren niet mogelijk is.

10. ALGORITMEN VOOR HET DAADWERKELIJK UITVOEREN VAN INTEGRATIE
In het voorgaande zagen we een noodzakelijke en voldoende voorwaarde waaronder een element van een differentiaallichaam elementair integreerbaar is en in enkele zeer speciale gevallen konden we aantonen dat aan deze voorwaarde al dan niet voldaan was.

De vraag rijst dan al spoedig of er algemene methoden bestaan om deze voorwaarde te verifiëren en – indien aan de voorwaarde is voldaan – een bijbehorende keten van elementaire uitbreidingen van het grondlichaam te construeren zodanig dat het laatste lichaam in deze keten een elementaire integraal van het betreffende element van het grondlichaam bevat.

Dit is een zeer gecompliceerd probleem dat slechts ten dele is opgelost en dat een belangrijk aspect van de computeralgebra vormt. Hier vermelden wij slechts enkele resultaten. Voor details verwijzen we naar LEVELT [8] en naar DAVENPORT [3].

In 1969 bewees Risch de volgende

STELLING

Laat $K = C(x, t_1, t_2, \dots, t_n)$ een functielichaam zijn waarbij C het constantenlichaam van K is en elke t_i transcendent is over $C(x_1 t_1, t_2, \dots, t_{i-1})$ en wel een logaritme daarover of een exponentiaal. Er bestaat dan een algoritme dat van elk element van K kan beslissen of het een elementaire integraal heeft in K en – indien dit laatste het geval is – deze integraal kan bepalen.

DAVENPORT [2] betrok algebraïsche functies⁵ in zijn beschouwingen en kwam daarbij tot de volgende

STELLING

Laat $K = C(x, y, t_1, t_2, \dots, t_n)$ een functielichaam zijn waarbij C het constantenlichaam van K is, y algebraïsch over $C(x)$ en elke t_i transcendent is over

⁵Onder een algebraïsche functie $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ over het lichaam K , in de variabelen x_1, x_2, \dots, x_n verstaan we een functie die voldoet aan een vergelijking van de gedaante $F(y, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ waarbij het linkerlid een irreducibel polynoom is met coëfficiënten in K . Zo voldoet een algebraïsche functie $y = f(x)$ over \mathbb{C} aan een vergelijking van de gedaante

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + P_1(x)y + P_0(x) = 0 \quad \text{met} \quad P_i(x) \in \mathbb{C}[x].$$

$C(x, y, t_1, t_2, \dots, t_{i-1})$ en wel een logaritme of een exponentiaal. Er bestaat dan een algoritme dat van elk element van K kan beslissen of het een elementaire integraal heeft in K en – indien dit laatste het geval is – deze integraal kan bepalen.

Dit algoritme is zeer gecompliceerd en nog niet voor alle $a \in K$ geprogrammeerd.

Tot slot zij opgemerkt dat er ook pogingen ondernomen worden om de eis van elementair zijn (in de tot nu toe gehanteerde betekenis) te laten vallen. Voor relevante literatuur zie DAVENPORT [3].

APPENDIX UITBREIDINGEN

* Een lichaam L heet een uitbreiding van een lichaam K als L het lichaam K omvat en de op L gedefinieerde operaties, indien toegepast op de elementen van K , samenvallen met de op K gedefinieerde operaties. Notatie: $K \subset L$.

* L is een algebraïsche uitbreiding van K als ieder element α van L algebraïsch is over K , d.w.z. voldoet aan een betrekking van de gedaante

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

voor zekere – van α afhankelijke – $n \in \mathbb{N}$ en $a_i \in K$.

* Een over K algebraïsch element α heeft een éénduidig bepaald minimum-polynoom (definiërend polynoom), d.w.z. een moniek polynoom van minimale graad waarvan α nulpunt is. Dit polynoom is irreducibel in $K[x]$.

* Het lichaam $K(t)$ dat ontstaat door adjunctie van het element t aan het lichaam K , bestaat uit alle rationale verbandingen van alle elementen van K met t . Indien t algebraïsch is over K , dan is $K(t)$ een algebraïsche uitbreiding en elk element α van $K(t)$ is op éénduidige wijze te schrijven als

$$\alpha = a_{p-1} t^{p-1} + a_{p-2} t^{p-2} + \dots + a_0$$

waarbij p de graad is van het minimum-polynoom van t .

Indien t niet algebraïsch is over K , dan heet t transcendent over K en $K(t)$ een transcendente uitbreiding van K .

LITERATUUR

1. R. BAER, 1927, *Algebraische Theorie der differentiierbaren Funktionen-körper*. Sitzungsberichte der Deutschen Akad. der Wiss., p. 14-32.
2. J.H. DAVENPORT, 1984, *Intégration algorithmique des fonctions élémentairement transcendentes sur une courbe algébrique*. Ann. de l'Institut Fourier **34**, p. 271-276.
3. J.H. DAVENPORT, Y. SIRET, E. TOURNIER, 1993, *Computer Algebra*, Academic Press, ISBN 0-12-204232-8.
4. K.O. GEDDES, S.R. CZAPOR, G. LABAHN, 1992, *Algorithms for Computer Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, ISBN 0-7923-9259-0.
5. G.H. HARDY, 1916, *The integration of functions of a single variable*. C.U.P. New York.
6. I. KAPLANSKY, 1976, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Actual. Scient. et Ind. 1251, Paris, ISBN 2-7056-1251-3.
7. E.R. KOLCHIN, 1973, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press, New York.
8. A.H.M. LEVELT, 1993, *Lectures on Symbolic Integration*, Tempus Summer Schools, Nijmegen.
9. J. LIOUVILLE, 1834, *Mémoire sur les transcendentes Elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur amplitude*, Journal Ec. Polyt. **14** (23 cahier) p. 37-83.
10. B. MISHRA, 1993, *Algorithmic Algebra*, Springer Verlag, New York etc. ISBN 0-387-94090-1.
11. E. RISCH, 1969, *The Problem of Integration in Finite Terms*, Trans. Am. Math. Soc. **139**, p. 167-189.
12. J.F. RITT, 1950, *Differential Algebra*, New York.
13. M. ROSENLICHT, *Integration in finite terms*, Am. Monthly **79**, p. 963-972.
14. M. ROSENLICHT, 1968, *Liouville's Theorem on Functions with Elementary Integrals*, Pacific Journ. of Math. **24**, p. 153-161.
15. B.M. TRAGER, 1976, *Algebraic Factoring and Rational Function Integration*, Proc. 1976 ACM Symp. on Symb. and Alg. Computation, ACM Inc., New York 1976, p. 219-226.
16. B.M. TRAGER, 1985, *On the Integration of Algebraic Functions*, Ph. D. Thesis, Dept. El. Eng. & Comp. Science, M.I.T.

Het paard van Troje

Computeralgebra in het voortgezet onderwijs

P. Drijvers

Freudenthal Instituut Utrecht

INLEIDING

Computeralgebra is in eerste instantie niet ontwikkeld voor educatief gebruik. Pas relatief laat –toen hardware goedkoper was geworden en de software toegankelijker– realiseerde men zich dat computeralgebra-systemen mogelijk ook in het onderwijs een plaats zouden kunnen krijgen. Over de rol van computeralgebra in het voortgezet onderwijs gaat deze voordracht.

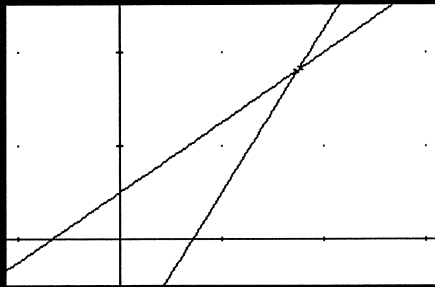
Oppervlakkig beschouwd lijkt symbolische software een geschenk voor de leerling. Stelt u zich eens voor: geen moeizame rekenpartijen meer, geen vervelende rekenfouten die alles teniet doen. Het leven wordt een stuk aangenamer. Bevlogen docenten zien andere voordelen: eindelijk eens echte wiskunde doen, generalisaties, concepten, abstracties, probleemoplossen, modelvorming. Maar de vraag is natuurlijk of alle leerlingen daar blij mee zullen zijn: het routinewerk, waarmee sommigen (velen?) tot voor kort een $5\frac{1}{2}$ voor het proefwerk bij elkaar sprokkelden, wordt ondergeschikt gemaakt aan vaardigheden van een hogere orde. De handmatige oefenfase dreigt te worden bekort zonder dat duidelijk is welke gevolgen dit heeft voor het inzicht. Het aantal uren wiskunde op de lessentabel komt in de toekomst wellicht onder druk te staan omdat heel veel uit het programma de relevantie heeft verloren nu de machine 'alles kan'. Het geschenk dat computeralgebra lijkt te zijn kan zich ook tegen de ontvangers keren, zoals in de Griekse mythologie het paard van Troje. Volgens Homeros ontvingen de Trojanen het geschenk van de vijand Athene met open armen, zonder zich van het gevaar bewust te zijn dat het in zich droeg. De desastreuze gevolgen zijn bekend.

De inpassing van computeralgebra in het voortgezet onderwijs is een ingrijpende en subtiële kwestie. Het denken over de gevolgen die de implementatie van symbolische software heeft voor didactiek en inhoud van het wiskundeonderwijs staat nog maar in de kinderschoenen, ook internationaal gezien. Om te voorkomen dat we met computeralgebra een paard van Troje in het voortgezet onderwijs binnenhalen is het zaak dat er op korte termijn praktisch en theoretisch onderzoek gedaan wordt. Als dat niet gebeurt, zal de technologie de praktijk inhalen, omdat leerlingen gewoon over dergelijk gereedschap zullen beschikken. Hier gaat de vergelijking met het paard van Troje dus mank: we kunnen het niet buiten de muren van de school laten staan. Wel kunnen we er hopelijk voor zorgen dat het geen bedreiging maar een verrijking vormt voor het wiskundeonderwijs.

In deze voordracht passeert een aantal voorbeelden van het gebruik van computeralgebra in het voortgezet onderwijs de revue. Deze voorbeelden, die betrekking hebben op leerstof van diverse leerjaren, vormen aanleiding tot commentaar over didactische en praktische aspecten. Ervaringen in binnen- en buitenland en met andere technologie zoals grafische rekenmachines zullen daarbij een rol spelen. Als computeralgebra-pakket gebruik ik *DERIVE*, dat naar mijn idee het meest geschikte systeem is voor het voortgezet onderwijs.

Voorbeeld 1: Het oplossen van een lineaire vergelijking

Het eerste voorbeeld is gericht op de onderbouw. Het komt uit Oostenrijk en is, naar mijn indruk, representatief voor de wijze waarop men daar denkt over de rol van computeralgebra in het VO. In [8] staat meer over de rol van computeralgebra en grafische rekenmachines in buitenlandse examens. Leerlingen moeten de lineaire vergelijking $7x - 5 = 3x + 2$ oplossen en gebruiken daarbij *DERIVE*. Het scherm zou er op een gegeven moment zo uit kunnen zien:

<p>1: $7x - 5 = 3x + 2$</p> <p>2: $(7x - 5 = 3x + 2) + 5$</p> <p>3: $7x = 3x + 7$</p> <p>4: $(7x = 3x + 7) - 7$</p> <p>5: $7x - 7 = 3x$</p> <p>6: $(7x = 3x + 7) - 3x$</p> <p>7: $4x = 7$</p> <p>8: $\frac{4x = 7}{4}$</p> <p>9: $x = \frac{7}{4}$</p>	<p>10: $7 \frac{7}{4} - 5 = 3 \frac{7}{4} + 2$</p> <p>11: $\frac{29}{4} = \frac{29}{4}$</p> <p>12: $x = \frac{7}{4}$</p> 
---	--

In regel 1 staat de vergelijking. De leerling wil daar links en rechts 5 bij optellen en voert dus regel 2 in. De notatie van *DERIVE* is hier niet gebruikelijk, maar eigenlijk wel aardig: je ziet zo goed dat je '+5' op de hele vergelijking moet loslaten. *DERIVE* vereenvoudigt 2 tot 3. Aangemoedigd hierdoor laat de leerling 7 van de vergelijking aftrekken. Dat valt tegen, zoals blijkt uit regel 5. De leerling ziet dat deze stap de oplossing niet dichterbij brengt en weet dat rekenfouten hierbij geen rol kunnen spelen. Terug dus naar regel 3. Daarvan wordt $3x$ afgetrokken en dat is volgens regel 7 wel zinvol. Nu nog delen door 4, en de uitkomst staat in regel 9. Ter controle wordt $x = \frac{7}{4}$ in de oorspronkelijke

vergelijking ingevuld. Uit regel 11 blijkt dat links en rechts inderdaad hetzelfde getal staat: $\frac{29}{4}$. Dat is dus de hoogte van het snijpunt van de twee lijnen. Rechtsonder zijn de grafieken getekend en de coördinaten van het snijpunt zijn (1.75, 7.25). Dat klopt dus. Als laatste verificatie is het commando SOLVE op regel 1 losgelaten. Het antwoord in regel 12 stemt tevreden.

Commentaar

Een simpel voorbeeld kan aanleiding geven tot een heleboel commentaar. Om te beginnen: waarom zouden leerlingen lineaire vergelijkingen moeten leren oplossen als de beschikbare technologie dat in een wip voor ons doet? Dat is een goede vraag. Sommige basistechnieken uit de wiskunde zijn zo fundamenteel dat we ze toch aan leerlingen blijven onderwijzen. Een van de kwesties waarover men zich in de toekomst zal moeten buigen is de vraag welke dat zijn, en waarom. Persoonlijk heb ik het gevoel dat lineaire vergelijkingen daar wel bijhoren.

Maar waarom moeten leerlingen dat dan met een computer doen, en waarom niet gewoon met de hand? Ik denk dat leerlingen het ook met de hand moeten doen, maar dat computergebruik hierop een zinvolle aanvulling kan vormen. De leerling wordt bij het gebruik van de technologie niet afgeleid door het rekenwerk en is gedwongen om zich op de oplossingsstrategie te concentreren. 'Wat ga ik nu doen?' is de vraag die de leerling zich steeds moet stellen. De stappen moeten vooraf geëxpliciteerd worden. Dat leidt tot een hoger standpunt waarbij de methode centraal komt te staan. Dat is niet gemakkelijk maar wel leerzaam. Overigens zullen onder invloed van de technologische ontwikkeling juist het probleemoplossend vermogen en de vaardigheid om een stappenplan te maken in de toekomst nog relevanter worden. Dat is een extra reden om hieraan aandacht te besteden.

Goed, met de computer dus. Maar waarom dan niet met een specifiek programma zoals VU-losop? En zo'n plaatje maak je zó met een grafische rekenmachine! Dat is waar, maar computeralgebra combineert juist de algebra en de grafieken. Meer algemeen gesproken is de breedte één van de sterke punten van computeralgebra in het onderwijs. Een computeralgebra-pakket biedt de leerlingen een scala aan toepassingen (uit de algebra, de analyse en daarnaast de grafische mogelijkheden) met maar één interface, zodat niet voor elke toepassing een ander programma nodig is. De bediening van *DERIVE* is wel ingewikkelder dan die van de meeste specifieke software, maar die investering is op langere termijn misschien wel de moeite waard. Overigens zal de gebruikersvriendelijkheid in de toekomst ongetwijfeld verbeteren. De volgende versie van *DERIVE* zal vermoedelijk onder WINDOWS draaien en muisgestuurd zijn.

Als we dan besluiten dat we *DERIVE* gebruiken bij het onderwijs in het oplossen van lineaire vergelijkingen, dan komt een volgende vraag boven. Is het niet erg gekunsteld om dat op deze manier te doen als er gewoon een SOLVE-knop beschikbaar is? In zekere zin is dat zo. Een computeralgebra pakket is een stuk gereedschap en geen plaatsvervangende leermeester. Bij educatief gebruik zoals hierboven kan dat soms wringen. In dit concrete geval vind ik het niet zo'n probleem. Het programma heeft gewoon een ingebouwd antwoordenboek.

Zoals altijd hangt het van de leerling af of hij dat verantwoord kan hanteren.

Voorbeeld 2: het oplossen van een differentiaalvergelijking

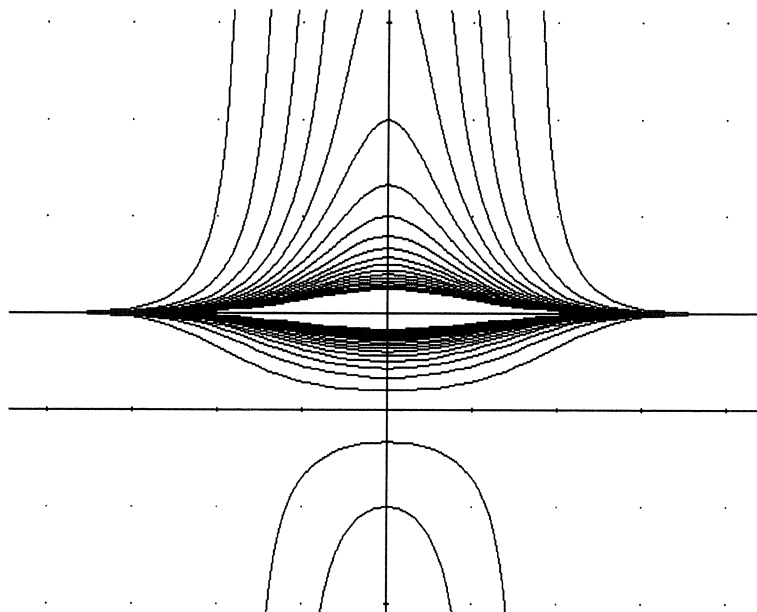
Net als een lineaire vergelijking kan ook een differentiaalvergelijking in *DERIVE* 'met de hand' opgelost worden. Neem bijvoorbeeld $\frac{dy}{dx} = xy(1-y)$. Hieronder is deze *dv* met *DERIVE* op twee manieren aangepakt.

1: $\int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int x dx$	6: $p := -x y (1-y)$
2: $\text{LN}(y) - \text{LN}(y-1) = \frac{x^2}{2}$	7: $q := 1$
3: $\text{LN}(y) - \text{LN}(y-1) = \frac{x^2}{2} + c$	8: $\text{DSOLVE1_GEN}(p, q, x, y, c)$
4: $y = \frac{e^{x^2/2 + c}}{e^{x^2/2 + c} - 1}$	9: $\text{LN}(y-1) - \text{LN}(y) + \frac{x^2}{2} = c$
5: ""	10: $y = \frac{e^{x^2/2}}{e^{x^2/2} - e^c}$
	11: ""
	12: ""
	13: ""

In de linkerhelft van het scherm doet de gebruiker het meeste werk. Hij herkent het type van de *dv*, scheidt zelf de variabelen en geeft in regel 1 opdracht om te primitiveren. *DERIVE* voegt geen integratieconstante toe, zoals blijkt in regel 2. Dan wordt in regel 3 met de hand gedaan. Vervolgens moet als het even kan *y* nog expliciet als functie van *x* geschreven worden. Dat doet *DERIVE* na het commando *SOLVE*. Het resultaat is regel 4.

Op de rechterhelft van het scherm is het oplossen geautomatiseerd. Je hoeft de *dv* helemaal niet te herkennen als één met scheidbare variabelen, maar je geeft gewoon het commando *DSOLVE_GEN*. De syntax van het commando moet natuurlijk wel bekend zijn: *DSOLVE_GEN* lost differentiaalvergelijkingen van het type $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$ op, dus moet eerst aangegeven worden wat *p* en *q* zijn. Merk op dat *DERIVE* nu wel een integratieconstante in de oplossing verwerkt. De opdracht tot explicitering van *y* als functie van *x* moet net als links apart gegeven worden.

Het ligt voor de hand om een plaatje te tekenen van de oplossingen. Hieronder ziet u dat. Een mooi resultaat!



Commentaar

Wat opvalt is dat de oplossing in het linkervenster een andere gedaante heeft dan die in het rechter. De c links is het tegengestelde van de c rechts. Dit is een veel voorkomend fenomeen bij computeralgebra: verschillende representaties van hetzelfde. Het is dus van belang dat een leerling handig wordt in het nagaan of twee uitdrukkingen op hetzelfde neerkomen en dat is vaak niet zo eenvoudig.

Enigszins penibel is het feit dat beide oplossingen onvolledig zijn. Het plaatje hierboven is namelijk vervalst: de grafieken die tussen de lijn $y = 1$ en de x -as lopen zijn door mij toegevoegd. Deze oplossingen verliest *DERIVE* uit het oog door in de regels 2 en 9 onnauwkeurig met de absolute waarde om te gaan. De volledige oplossing van de dv zou ik zo willen opschrijven:

$$y = \frac{Ae^{\frac{x^2}{2}}}{Ae^{\frac{x^2}{\epsilon}} - 1} \text{ of } y = 1$$

waarbij A een reëel getal is dat ook nul of negatief kan zijn. Je moet als gebruiker dus altijd op je hoede blijven, zelfs als je denkt te kunnen vertrouwen op ingebouwde functies zoals in dit geval *DSOLVE_GEN*!

Ik vrees al met al dat computeralgebra niet de oplossing zal zijn voor de onbevredigende situatie rond differentiaalvergelijkingen in het huidige VWO-programma. Daarvoor zitten er te veel haken en ogen aan dit voorbeeld. Desondanks is het, net als het eerste voorbeeld, een illustratie van het zogenaamde White-Box/Black-Box idee, waarop ik nu kort in zal gaan.

HET WHITE-BOX/BLACK-BOX PRINCIPE

De twee voorbeelden die we nu gezien hebben verschillen qua wiskundig nivo,

maar hebben toch wat gemeenschappelijk. In beide gevallen gaat het om een opgave (een lineaire vergelijking respectievelijk een differentiaalvergelijking) waarbij in het oplossingsproces gebruik gemaakt wordt van vaardigheden die al eerder geleerd zijn. In het eerste voorbeeld is dat het (letter-)rekenen, in het tweede voorbeeld het primitiveren in combinatie met breuksplitsing. Het White-Box/Black-Box idee komt er op neer dat deze 'basisvaardigheden', die van een lager nivo zijn dan de eigenlijke vraag, uitbesteed kunnen worden aan de technologie, in dit geval aan het computeralgebra-pakket. Hoe het pakket deze standaardhandelingen uitvoert, zie je als gebruiker op dit moment niet meer, maar dat is niet erg want je zou ze zelf met de hand kunnen controleren. Deze handelingen zijn in het Black-Box stadium.

Het eigenlijke probleem, het oplossen van de (differentiaal-)vergelijking, mag niet worden overgelaten aan het systeem, want dat wordt nog niet beheerst door de leerling. Op dit nivo dus geen ondoorzichtige SOLVE-procedures, maar alleen een transparant gebruik van de software. Het oplossen van de vergelijking bevindt zich nog in de White-Box fase.

Toen (letter-)rekenen, breuksplitsen en primitiveren zelf nog in een leerstadium waren, kon *DERIVE* natuurlijk nog niet hiervoor gebruikt worden. Het gaat dus om een recursief principe: in eerste instantie moet de te leren vaardigheid met de hand uitgevoerd worden, waarbij eventuele 'lagere' vaardigheden uitbesteed kunnen worden aan de technologie. Later, wanneer het nieuwe onderwerp beheerst wordt, kan het zelf weer als laag-nivo vaardigheid overgelaten worden aan een computeralgebra pakket tijdens het leren van het volgende nieuwe onderwerp. Het is duidelijk dat Buchberger, die dit idee in [1] geformuleerd heeft, een hiërarchische kijk op wiskunde heeft.

Ook wanneer de beheersing van de basisvaardigheden te wensen over laat, kunnen op deze manier nieuwe onderwerpen behandeld worden. KUTZLER [10] spreekt in dit verband over *scaffolding didactics*: de technologie fungeert als een steiger die de zwakke plekken in het bouwwerk van de wiskunde steunt en schraagt. Kunnen leerlingen bij wie breuksplitsen niet wil lukken op deze manier wel begrijpen wat een differentiaalvergelijking is? Sommige leerlingen zullen mogelijk inderdaad inzicht in sommige onderwerpen verwerven zonder de onderliggende technieken te beheersen. Dat lijkt misschien gevaarlijk, maar die situatie kennen we al van de gewone rekenmachine. Leerlingen gebruiken die terwijl dat in onze ogen vaak overbodig is, maar kunnen daarmee wel zaken aan die op een echt hoger nivo liggen.

Sterk simplificerend kun je zeggen dat de White-Box/Black-Box filosofie er op neer komt dat je technologie alleen moet gebruiken voor zaken die je zelf al beheerst. Natuurlijk zijn er ook andere invalshoeken mogelijk. In onder andere Engeland en ook in Nederland zijn er stromingen die onder andere de mogelijkheden van technologie benadrukken. Volgens deze optiek kan een computeralgebra-pakket ook in de oriëntatiefase van het leerproces al een nuttige rol spelen. Het kan als experimenteeromgeving gebruikt worden waarmee nieuwe gebieden geëxploreerd kunnen worden. Het systeem kan de voorbeeldgenerator zijn, waarvan de (op dat moment misschien onbegrijpelijke) resultaten aanleiding vormen tot het ontwikkelen van nieuwe vaardigheden of concepten.

Deze optiek wordt wel de Black-Box/White-Box benadering genoemd. Let dus op de volgorde! De volgende voorbeelden sluiten bij deze benadering aan.

Voorbeeld 3: De afgeleide van de machtsfunctie

Op de technische universiteit van Plymouth heeft men goede ervaringen met een open en instrumenteel gebruik van computeralgebra. BERRY [2] rapporteert enthousiast over het gebruik van *DERIVE* in het onderwijs aan volwassen studenten die met een achterstand aan de opleiding beginnen. Vanaf het begin wordt *DERIVE* bij het 'bijspijkeren' veel gebruikt.

In de opgave die ik nu beschrijf, fungeert *DERIVE* als generator van uitkomsten die de meeste studenten op dat moment niet snappen. De opdracht is heel open: onderzoek wat Calculus Differentiate doet met uitdrukkingen van de vorm x^n . De meeste studenten weten niet (meer) wat differentiëren is. Ze experimenteren wat, en de uitvoer van *DERIVE* is absoluut niet transparant zoals Buchberger dat voorstelt. De bedoeling is dat studenten gewoon wat gaan experimenteren. Het volgende scherm zou daarbij kunnen ontstaan.

1: $\frac{d}{dx} x$	8: $4 x^3$	14: $-\frac{2}{x^3}$	19: $\frac{d}{dx} x^{-1/2}$
2: $\frac{d}{dx} 1$	9: $\frac{d}{dx} 0$	15: $\frac{d}{dx} x^{1/2}$	20: $-\frac{1}{2 x^{3/2}}$
3: $\frac{d}{dx} x^2$	10: 0	16: $\frac{1}{2 \sqrt{x}}$	21: $\frac{d}{dx} x^n$
4: $2 x$	11: $\frac{d}{dx} x^{-1}$	17: $\frac{d}{dx} x^{1/3}$	22: $n x^{n-1}$
5: $\frac{d}{dx} x^3$	12: $-\frac{1}{x^2}$	18: $\frac{d}{dx} x^{2/3}$	23: ""
6: $3 x^2$	13: $\frac{d}{dx} x^{-2}$		24: ""
7: $\frac{d}{dx} x^4$			25: ""

Uiteindelijk moet dit leiden tot het inzicht hoe de differentiatie-operator op machtsfuncties werkt. Studenten kunnen dit algoritme zelf reconstrueren en de reconstructie aan de hand van nieuwe voorbeelden verifiëren.

Commentaar

Het gebruik van *DERIVE* in dit voorbeeld is vrij natuurlijk en eenvoudig. De spanning tussen didactisch versus instrumenteel gebruik is hier naar mijn idee wat kleiner dan in de voorgaande voorbeelden. De student kan in een rechtstreekse dialoog met de software experimenteren en variëren. Aan de

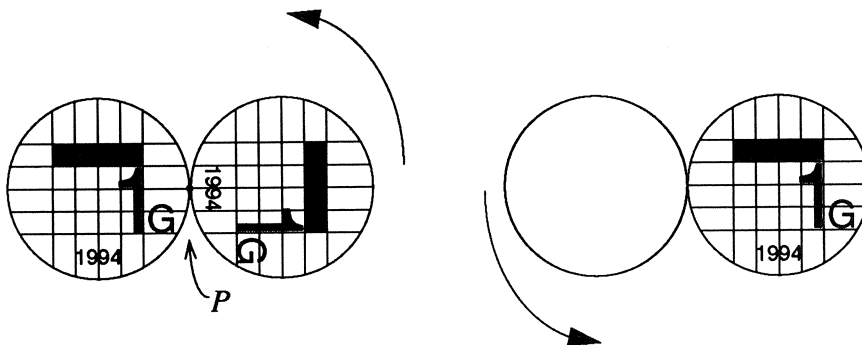
hand van de antwoorden van het pakket (her-)ontdekt de student de methode van het differentiëren van machtsfuncties.

Maar wat leert de student hiermee precies? In eerste instantie alleen maar patroonherkenning. Dat is wel een belangrijke vaardigheid, maar met differentiëren als zodanig heeft het niet veel te maken. Dat is m.i. een zwak punt in dit voorbeeld, maar Berry c.s. claimen dat de vraag naar het waarom, naar de achtergronden, na een practicum als dit vanzelf naar voren komt. Zo beschouwd vormt dit practicum een motiverende opstap naar het ontwikkelen van het begrip differentiëren. Mijn eigen ervaring (zie [4]) in deze met een ander type leerling dan in Plymouth is minder positief: leerlingen zijn soms tevreden met het algoritme zonder de achterliggende theorie te willen kennen. Het trucje volstaat, en dat is toch niet wat we willen in het wiskundeonderwijs?

Voorbeeld 4: De cardioïde

Het idee van dit voorbeeld is ontleend aan lesmateriaal dat is geschreven voor experimenten met de grafische rekenmachine (zie [3]). Natuurlijk is een grafische rekenmachine geen computeralgebra systeem, maar de inpassing van beide vertonen gemeenschappelijke elementen (zie [7]).

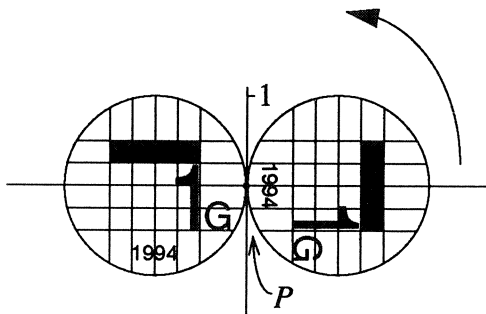
In dit voorbeeld gaat het om de volgende situatie.



Twee guldens liggen tegen elkaar aan. De linker ligt vast, en de rechter gaat daaromheen rollen zonder te slippen. Welke baan beschrijft nu een vast punt op de rand van de draaiende gulden?

Voer het experiment eerst maar eens uit. Hoe vaak is de draaiende gulden 'over de kop' gegaan als die na één ronde de beginpositie weer ingenomen heeft? En waar staat '1994' als de draaiende gulden zich helemaal links van de vaste bevindt?

Na het experimenteren komt het mathematiseren. We leggen een assenstelsel over de guldens heen zodat de x -as door de middelpunten gaat en de oorsprong op het raakpunt valt. Daar ligt ook het punt P van de rechtergulden, waarvan we de baan gaan volgen. De schaal van het assenstelsel kiezen we gelijk aan de straal van een gulden.



Voor het vinden van de bewegingsvergelijkingen van P ontbinden we de beweging in twee componenten: de draaibeweging van het middelpunt van de rechter gulden om het middelpunt van de linker, en de beweging van P rond het middelpunt van de draaiende gulden. De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$x_1(t) = 2 \cos(t) - 1$$

$$y_1(t) = 2 \sin(t)$$

respectievelijk

$$x_2(t) = \cos(2t + \pi)$$

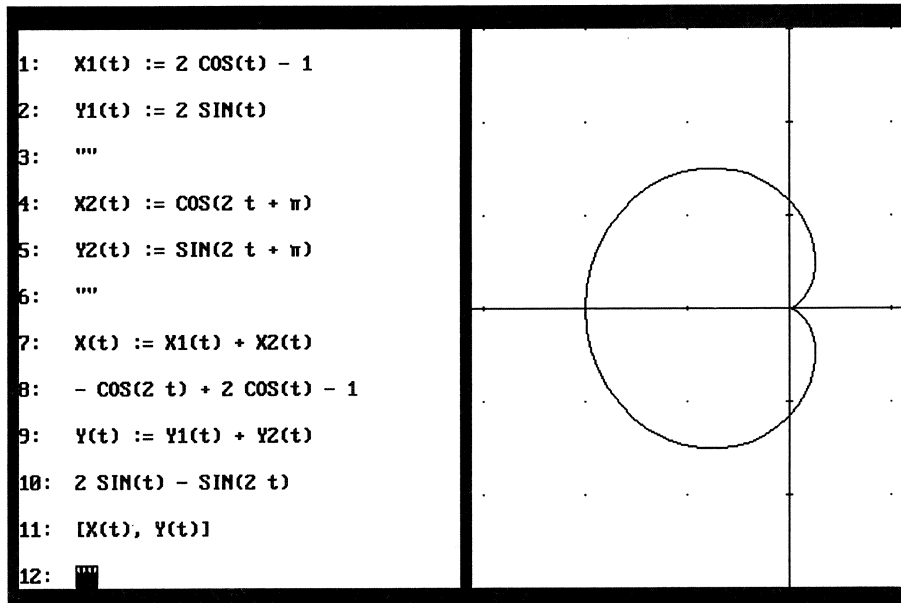
$$y_2(t) = \sin(2t + \pi)$$

De totale beweging van P ontstaat door optellen van de twee componenten:

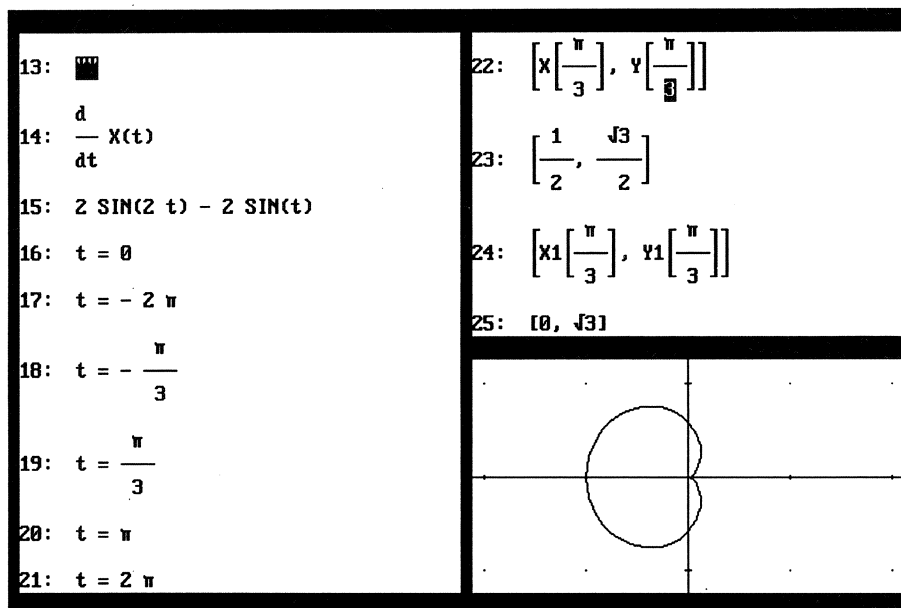
$$x(t) = 2 \cos(t) - 1 + \cos(2t + \pi)$$

$$y(t) = 2 \sin(t) + \sin(2t + \pi)$$

Tot zover heeft computeralgebra nog niet geholpen. Maar nu komt *DERIVE* natuurlijk van pas:



Het plaatje van de cardioïde vormt het antwoord op het gestelde probleem, maar het roept zelf ook weer vragen op. Bijvoorbeeld: welke waarden kan de x -coördinaat aannemen? Om deze vraag te beantwoorden, onderzoeken we het bereik van de functie $t \rightarrow x(t)$. Het rekenwerk doet *DERIVE* weer:

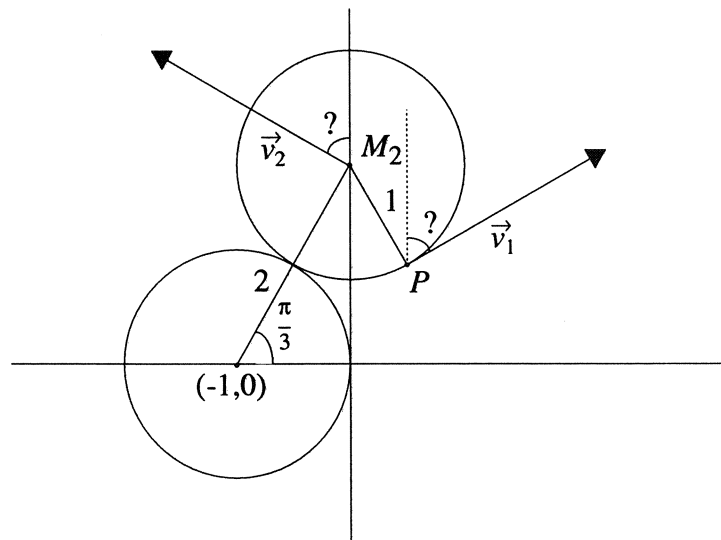


De regels 16 t/m 21 geven de nulpunten van de afgeleide van $x(t)$. In regel 22

wordt $t = \frac{\pi}{3}$ ingevuld, wat regel 23 oplevert. Het meest rechtse punt van de cardioïde blijkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ te zijn. In de tekening is dat niet in één oogopslag te controleren, omdat de eenheden op de assen niet gelijk zijn. Bij gelijke eenheden geeft *DERIVE* namelijk een vertekend beeld, zodat bijvoorbeeld een cirkel een ellips lijkt. Jammer trouwens dat de eenheden niet bij de assen afgebeeld worden.

Kennelijk is x maximaal $\frac{1}{2}$. Omdat dit een onverwacht mooi antwoord is, is $t = \frac{\pi}{3}$ ook in regel 24 ingevuld in de parametervoorstelling van de cirkelbeweging van het middelpunt van de draaiende gulden. Dan blijkt dat dat middelpunt precies op de y -as ligt. Dat is een eigenschap van de cardioïde die ik niet voorzien had: de uiterste waarde van x wordt aangenomen als het middelpunt van de draaiende gulden op de y -as ligt. Is deze eigenschap ook zonder analytisch rekenwerk te begrijpen?

Met enig nadenken wel. In het punt met de uiterste x -waarde is de snelheid in de x -richting gelijk aan 0. De snelheidsvector staat dus verticaal. De snelheidsvectoren van de twee deelbewegingen, \vec{v}_1 en \vec{v}_2 , zijn even lang en moeten dus, willen ze een verticale som hebben, een tegengestelde hoek met de y -as maken. Dat dat zo is als het middelpunt van de draaiende gulden op de y -as ligt, volgt uit onderstaande tekening.



Hierbij gebruiken we dus dat we al weten dat $t = \frac{\pi}{3}$. Zonder dat is de redenering iets moeilijker. Beschouwingen over de grootte en de richting van de snelheidsvector zijn overigens vaak inzichtelijk bij het bestuderen van een kromme.

Commentaar

Het aanschouwelijke vertrekpunt van dit voorbeeld bleek tijdens experimentele lessen over dit voorbeeld tot de verbeelding van leerlingen te spreken. Het met de hand draaien van de guldens is functioneel: de leerlingen vielen regelmatig terug op de tastbare guldens om het voorstellingsvermogen te voeden of om de bevindingen te verifiëren.

Het opstellen van de bewegingsvergelijkingen is iets dat niet door de technologie uit handen genomen wordt. Deze vaardigheid zal dus ook in de toekomst belangrijk blijven en minstens zo nadrukkelijk als tot nu toe in het onderwijs aandacht verdienen.

Als de bewegingsvergelijkingen eenmaal bepaald zijn, is het tekenen van de kromme natuurlijk een fluitje van een cent. Het plaatje hoeft echter niet meer het eindstation te zijn. De uitvoer van de technologie hoeft niet als eindproduct beschouwd te worden, maar als uitdaging tot verder onderzoek. Hoewel we moeten oppassen om niet teveel van leerlingen te vragen, lijkt het mij goed om te proberen bij hen een dergelijk houding aan te leren.

In dit voorbeeld concentreert dat verdere onderzoek zich op de uiterste waarde van x . Als de strategie gekozen is (afgeleide van x op 0 stellen), is de rest weer eenvoudig met *DERIVE*. Maar opnieuw hoeft het antwoord niet het einde van het verhaal te zijn: de meetkunde vormt een alternatieve kijk op het probleem.

Mede doordat het (symbolische) rekenwerk en het tekenwerk niet veel tijd meer kosten, kan computeralgebra ruimte bieden voor onderzoek en voor alternatieve oplossingen. Dwarsverbanden tussen formule en grafiek, tussen algebra, analyse en meetkunde komen beter uit de verf. Ook in [6] en [9] worden voorbeelden besproken waarin dergelijke dwarsverbanden een grote rol spelen.

Voorbeeld 5: Variatie van de cardioïde

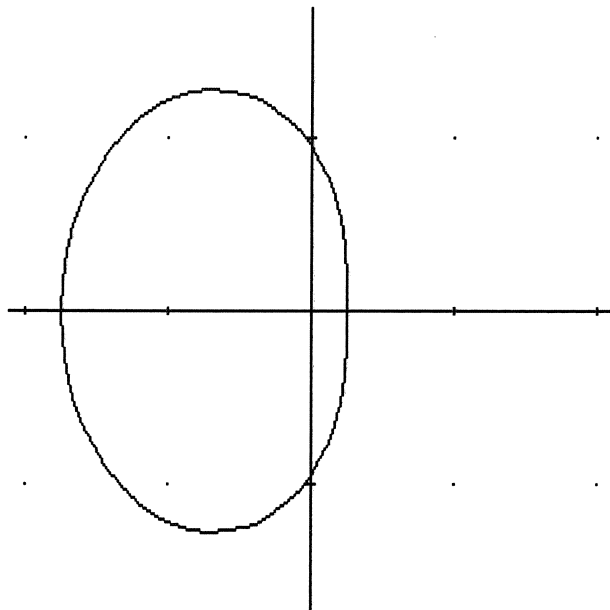
Het voorbeeld van de cardioïde kan een aardig vervolg krijgen. Waarom zouden we alleen op punten letten die op de rand van de draaiende gulden liggen? Wat verandert er als we een punt volgen dat 'halverwege' ligt, d.w.z. op een halve straal van het middelpunt?

De bewegingsvergelijkingen worden dan:

$$x(t) = 2 \cos(t) - 1 + \frac{1}{2} \cdot \cos(2t + \pi)$$

$$y(t) = 2 \sin(t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2t + \pi)$$

en dit geeft het onderstaande plaatje.



Je kunt natuurlijk ook een andere afstand tot het middelpunt nemen. Als we die afstand a noemen, ontstaan bewegingsvergelijkingen met een parameter:

$$x(t) = 2 \cos(t) - 1 + a \cdot \cos(2t + \pi)$$

$$y(t) = 2 \sin(t) + a \cdot \sin(2t + \pi)$$

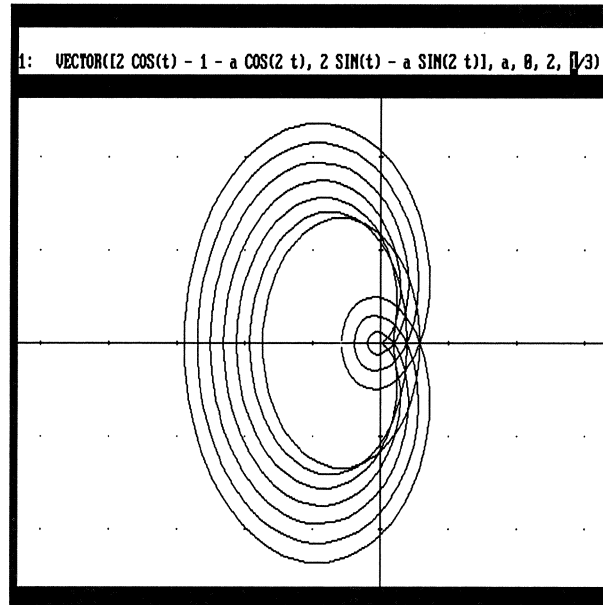
of, iets korter:

$$x(t) = 2 \cos(t) - 1 - a \cdot \cos(2t)$$

$$y(t) = 2 \sin(t) - a \cdot \sin(2t).$$

Het geval dat a groter dan 1 is, betekent dat het punt over de rand van de gulden uitsteekt. Denk bijvoorbeeld aan een rijksdaalder die bovenop de draaiende gulden ligt.

Variatie van de waarde van a laat zich in *DERIVE* mooi met het vector-commando uitvoeren:



Dit zijn de zogenaamde *slaklijnen van Pascal*. De cardioïde blijkt juist de overgang te vormen tussen de 'gedekte' slaklijnen en de exemplaren met een lus. Voor de hand liggende vragen zijn nu natuurlijk: welke vormen kan een slaklijn hebben, en welke waarde(n) van a horen daarbij? Wat gebeurt er met de slaklijnen als a heel groot wordt, of juist dicht bij 0 komt? Een aardige bron van experiment en onderzoek, waarin computeralgebra een belangrijke ondersteunende rol kan spelen. In [5] staat een *DERIVE*-practicum waarin de slaklijnen van Pascal onderzocht worden samen met hun inversies. Deze inversies blijken 'oude bekenden' te zijn: de kegelsnedes.

Commentaar

Dit korte voorbeeld geeft aan hoe de invloed van een parameter op een dynamische wijze tastbaar wordt gemaakt met *DERIVE*. Dynamiek en visualisatie zijn in het algemeen twee belangrijke troeven van computergebruik in het wiskundeonderwijs. Verder kunnen de opgaven opener worden, waarbij meer ruimte ontstaat voor eigen producties van leerlingen.

Het bovenstaande plaatje kan overigens ook prima gemaakt worden met een grafische rekenmachine. Praktijkervaringen met dit laatste instrument leren ons dat leerlingen uitstekend in staat zijn om op grond van de tekeningen een 'familie' van krommen te classificeren. Ook het gedrag van de kromme als a heel groot wordt, of juist naar 0 toekruipt, leent zich goed voor onderzoek door leerlingen.

De technologie wordt in dit voorbeeld niet didactisch maar eerder instrumenteel gebruikt. Het systeem wordt gebruikt om routinewerk uit te voeren, waardoor de leerling vrij is om te experimenteren. Dat sluit goed aan bij het karakter van computeralgebra. Wel is het zo dat de gebruiker goed moet weten

wat hij doet. Zinnig gebruik van computeralgebra vraagt dus nogal wat van een leerling.

HET PAARD VAN TROJE?

Tot zover enkele voorbeelden. Maar hoe zit het nu met computeralgebra in het voortgezet onderwijs? Moeten we er nu blij mee zijn?

Het is duidelijk dat de kracht van computeralgebra in de breedte zit: rekenen, grafieken, algebra en analyse zijn gelijktijdig en met dezelfde interface beschikbaar. Dat impliceert wel een overdaad voor de beginnende gebruiker, die nogal wat drempels te nemen heeft voordat er soepel met het pakket gewerkt kan worden. Naar verwachting zullen die drempels in de toekomst lager worden, maar niet verdwijnen.

Natuurlijk verandert het wiskundeonderwijs op het moment dat computeralgebra er een rol in krijgt. Er komt meer ruimte voor experiment en onderzoek, voor eigen productie. Begrippen worden visueel ondersteund en de wiskundeles kan dynamischer worden. Er liggen kansen voor het leggen van dwarsverbanden tussen verschillende onderdelen van de wiskunde en voor realistische toepassingen.

Maar er zijn ook risico's. Met name zal het routinewerk minder belangrijk worden dan het nu is, en zullen vaardigheden van een hogere orde dominantier zijn. Denk aan mathematiseren, het kiezen van oplossingsstrategieën, redeneren, vertalen. Het gevaar bestaat dat we de leerlingen zullen overvragen door teveel te mikken op inzicht en probleemoplossend vermogen. Daarmee kan de wiskunde moeilijker worden, wellicht te moeilijk voor een aantal leerlingen die het vak nu wel met succes volgen. Maar het wiskundeonderwijs kan daarmee wel aan waarde winnen.

Door het bestaan van computeralgebra te negeren zou het onderwijs zich te ver van de praktijk houden. Daarbij denk ik dat negeren niet mogelijk is. Leerlingen zullen in steeds sterkere mate over computeralgebra beschikken, en zeker als het om handpalm PC's gaat, zal dit invloed krijgen op de lespraktijk. Dat houden we niet tegen.

Wel zal het allemaal nog even duren. Vermoedelijk zal over de rol van computeralgebra in het voortgezet onderwijs pas serieus nagedacht worden wanneer de grafische rekenmachine zijn plaats gevonden heeft. Nu de eerste experimentele eindexamens met grafische rekenmachines gepland worden, is te verwachten dat dat over enkele jaren het geval zal zijn.

Natuurlijk moet er nu al geanticipeerd worden op de komst van computeralgebra. Een interessant initiatief in dit verband vormt de werkgroep Computeralgebra in het Voortgezet Onderwijs, CAVO. In deze werkgroep, die voornamelijk uit leraren bestaat, wordt lesmateriaal ontwikkeld en uitgeprobeerd. Hopelijk zullen deze producten en ervaringen bijdragen aan de ontwikkeling van een visie op de rol van computeralgebra in het V.O..

Naar mijn idee is de invoering van computeralgebra in het V.O. een ingrijpende en subtiele kwestie, die risico's in zich draagt, maar ook kansen en mogelijkheden biedt die het onderzoeken waard zijn. Zorgvuldige experimenten en projecten die in samenhang met de internationale ontwikkelingen plaatsvin-

den moeten tot een uitgebalanceerde implementatie kunnen leiden waarin de risico's minimaal zijn en de voordelen optimaal uitgebuit worden. Dan denk ik niet dat het wiskundeonderwijs een paard van Troje in huis haalt. Maar dat dacht u natuurlijk al.

LITERATUUR:

1. B. BUCHBERGER (1990). Should students learn integration rules? In: *Sigsam Bulletin*, Vol 24-1.
2. J.S. BERRY, E. GRAHAM, A.J.P. WATKINS (1993). *Learning mathematics through DERIVE*. Ellis Horwood, New York.
3. M. DOORMAN, P. DRIJVERS, M. KINDT (1994). *Bewegingen in het vlak met een grafische rekenmachine*. Freudenthal instituut, Utrecht.
4. P. DRIJVERS (1992). De kettingregel met DERIVE: een lesverslag. In: *Euclides*, Vol 67-8.
5. P. DRIJVERS (1992). *Wiskunde leren met DERIVE*. Wolters-Noordhoff, Groningen.
6. P. DRIJVERS (1994). Een pagina omslaan.... In: *Euclides*, Vol 69-8.
7. P. DRIJVERS (1994). Graphics calculators and computer algebra systems: Differences & similarities. In: *The International DERIVE Journal*, Vol 1-1.
8. P. DRIJVERS (1994). Grafische rekenmachines en computeralgebra in het buitenland. In: *De Nieuwe Wiskrant*, Vol 13-4.
9. M. KINDT (1993). James Bond, de wet van Snellius en wiskunde B. In: *De Nieuwe Wiskrant*, Vol 13-1.
10. B. KUTZLER (1994). DERIVE - The Future of Teaching Mathematics. In: *The International DERIVE Journal*, Vol 1-1.

MC SYLLABI

- 1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang besliskunde, deel 1: wiskundige basiskennis*. 1965.
- 1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening*. 1965.
- 1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 3: statistiek* 1966
- 1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*. 1966.
- 1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde*. 1966.
- 1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering 1*. 1968.
- 1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang besliskunde, deel 6b: wiskundige programmering 2*. 1977.
- 1.7a G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1*. 1968.
- 1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2*. 1970.
- 1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7c: dynamische programmering 3*. 1971.
- 1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*. 1968.
- 2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*. 1967.
- 2.2. L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*. 1968.
- 3.1. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1*. 1967
- 3.2. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2*. 1968
- 3.3. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3*. 1968
- 4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen*. 1968
- 5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde*. 1968.
6. K.K. Koksmas. *Cursus ALGOL 60*. 1969.
- 7.1 *Colloquium moderne rekenmachine, deel 1*. 1969.
- 7.2 *Colloquium moderne rekenmachine, deel 2*. 1969.
- 8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen*. 1969.
- 9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijs. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1970
- 9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1970
- 10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*. 1970
- 11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijs, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*. 1971.
- 12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra*. 1971
- 13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*. 1971
- 14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatietheorie*. 1971
- 15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1972.
- 15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1973.
- 15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*. 1975.
- 16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren*. 1973
- 16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60*. 1973
- 17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1*. 1973.
- 17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2*. 1973.
- 17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3*. 1976.
- 18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Songh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971*. 1973.
- 19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens*. 1973.
- 20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*. 1976.
- 21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid*. 1975.
- 22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassingen van naburigheid*. 1976.
- 23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*. 1976.
- 23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*. 1977.
- 24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden*. 1975.
- 25 *Colloquium structuur van programmeertalen*. 1976.
- 26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1*. 1976.
- 26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2*. 1976.
- 27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden*. 1976.
- 28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems*. 1976.
- 29.1 J.C. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*. 1976.
- 29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2*. 1977.
- 30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen*. 1983.
- 31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie*. 1976.
- 32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfssystemen*. 1976.
- 33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*. 1977.
- 34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek*. 1977.
- 35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics*. 1978.
- 36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen*. 1977.
- 37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren*. 1978.
- 38.1 T.H. Koonwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I*. 1979.
- 38.2 T.H. Koonwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II*. 1979.
- 39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen*. 1978.
- 40 J. van Tiel. *Convexe analyse*. 1979.
- 41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations*. 1979.
- 42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen*. 1980.
- 43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus)*. 1980.

- 44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations*. 1980.
- 45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur*. 1980.
- 46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1*. 1981.
- 46.2 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2*. 1981.
- 47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices*. 1981.
- 47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations*. 1981.
- 47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I*. 1981.
- 47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II*. 1981.
- 47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I*. 1981.
- 47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II*. 1981.
- 47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation*. 1981.
- 48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1*. 1982.
- 48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2*. 1982.
- 49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups*. 1982.
- 50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie*. 1982.
- 51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie*. 1983

CWI SYLLABI

- 1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*. 1984.
- 2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories*. 1984.
- 3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.
- 4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1*. 1984.
- 5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2*. 1984.
- 6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roeper. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.
- 7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening*. 1985.
- 8 G.M. Tuijnman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization*. 1985.
- 9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.
- 10 Vacantiecursus 1986: *Matrices*. 1986.
- 11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes*. 1986.
- 12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.
- 13 G.M. Tuijnman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2*. 1987.
- 14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*. 1987.
- 15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen*. 1987.
- 16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1*. 1988.
- 17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985-1987*. 1988.
- 18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening*. 1988.
- 19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J.R. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX*. 1988.
- 20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1*. 1988.
- 21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2*. 1988.
- 22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3*. 1988.
- 23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer*. 1989.
- 24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde*. 1989.
- 25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw*. 1989.
- 26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986-1987. Mathematical structures in field theories*. 1990.
- 27 Vacantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen*. 1990.
- 28 Vacantiecursus 1991: *Meetkundige structuren*. 1991.
- 29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat*. 1992.
- 30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986-1987. Lectures on Kac-Moody algebras*. 1992.
- 31 Vacantiecursus 1992: *Systeemtheorie*. 1992.
- 32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987-1992*. 1992.
- 33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu*. 1993.
- 34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC*. 1992.
- 35 Vacantiecursus 1993: *Het reële getal*. 1993.
- 36 Vacantiecursus 1994: *Computeralgebra*. 1994.

